

F 1914

L. 051997

517

ANALELE UNIVERSITĂȚII BUCUREȘTI

SERIA
ȘTIINȚELE NATURII

MATEMATICĂ - MECANICĂ

ANUL XIV — Nr. 1 — 1965

ANALELE
UNIVERSITĂȚII
BUCUREȘTI

SERIA
ȘTIINȚELE NATURII

MATEMATICĂ - MECANICĂ

ANUL XIV — Nr. 1 — 1965



SERIA ȘTIINȚELE NATURII

COLEGIUL DE REDACȚIE

Redactor responsabil: Acad. prof. *M. Filipescu*.

Membri: Acad. prof. *H. Hulubei*; acad. prof. *M. Nicolescu*; prof. dr. docent în științe *P. Spacu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; prof. dr. docent în științe *N. Botnariuc*.

Secretari: Conf. dr. *Gh. Ciucu*; conf. dr. *D. Negoiu*.

MATEMATICĂ-MECANICĂ

COMITETUL DE REDACȚIE

Redactori responsabili: Acad. prof. *M. Nicolescu*; acad. prof. *H. Hulubei*

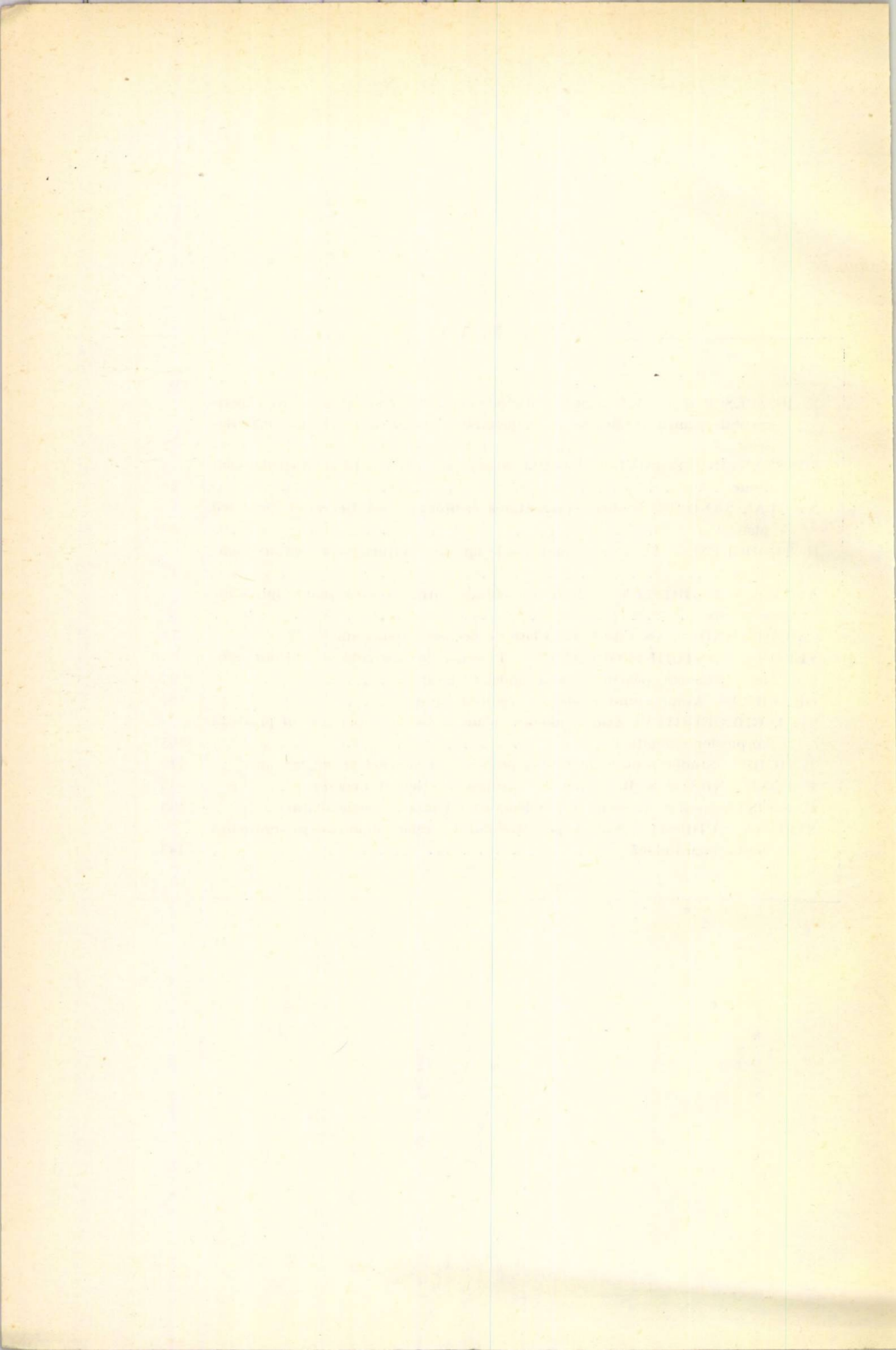
Membri: Acad. prof. *C. Iacob*; acad. *Th. V. Ionescu*; acad. prof. *Gh. Mihoc*; acad. prof. *H. Teodorescu*; acad. prof. *S. Tițeica*; acad. prof. *Gh. Gh. Vrânceanu*; prof. dr. *G. G. Brătescu*; prof. dr. *Gh. Galbură*; prof. dr. *V. Novacu*; prof. dr. *Gh. Petrescu*; conf. dr. *C. Andreian*; conf. dr. *Gh. Ciucu*.

Secretari: Conf. dr. *P. P. Theodorescu*, conf. dr. *M. Gavrilă*.

REDACȚIA
UNIVERSITATEA BUCUREȘTI
B-dul Gh. Gheorgiu-Dej nr. 64
Telefon 16.01.87/9

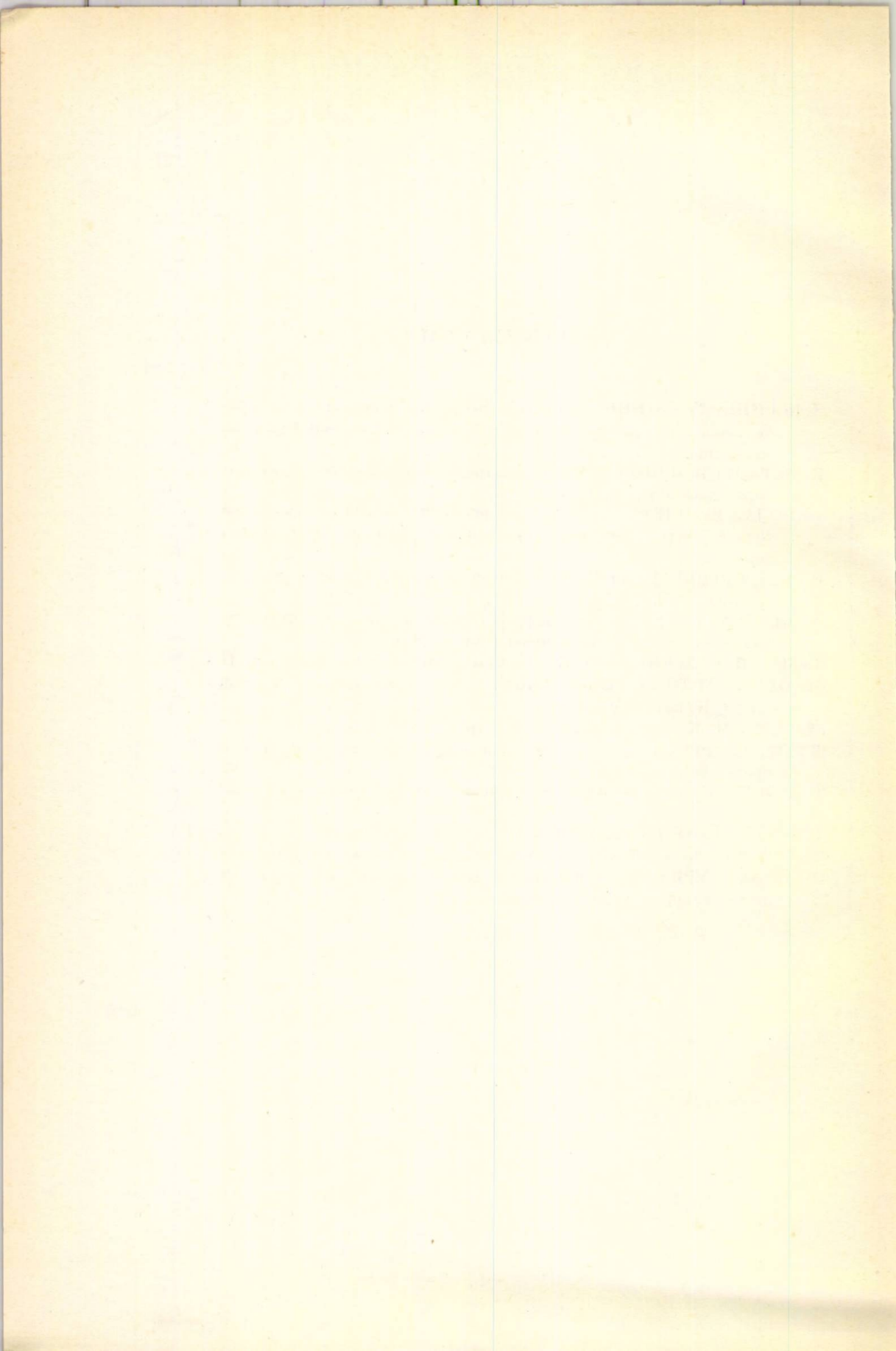
S U M A R

	Pag.
N. IOSIPESCU și D. NICULESCU : : Metode noi de încercare și rezultate experimentale pentru verificarea și completarea teoriilor de rupere ale materialelor	9
CONSTANTIN I. POPOVICI : Aspectul de expresii și de funcții ale fracțiilor continue	29
NICOLAE ȘANDRU : Despre reprezentarea complexă a soluției elastodinamicii plane	39
R. TEODORESCU : O metodă Monte-Carlo aplicată lanțurilor cu legături complete	47
ANATOLIE P. HRISTEV : Relații diferențiale între patru cimpuri spinoriale arbitrare.	51
CABIRIA ANDREIAN CAZACU : Clase de acoperiri riemanniene, II	71
VERONICA ANTOHI-TEODORESCU : Teorema de existență a soluțiilor problemei Cauchy pentru ecuația undelor iterată	97
GH. CIUCU : Asupra unui model cu venituri în grup	101
ȘT. I. GHEORGHITĂ : Asupra mișcării plane a fluidelor perfecte în prezența corpurilor alungite	105
T. HUIDU : Studiul fotoelastic al unor probleme de concentrări de tensiuni ² . .	113
T. POSTELNICU și N. BONCIOCAT : Asupra ecuației lui Lederer	125
E. SOÓS : Funcții de tensiune în problema completă a termoelasticității	133
STELIAN TURBATU : Asupra potențialului vitezelor în mișcarea transonică nestaționară-plană	143



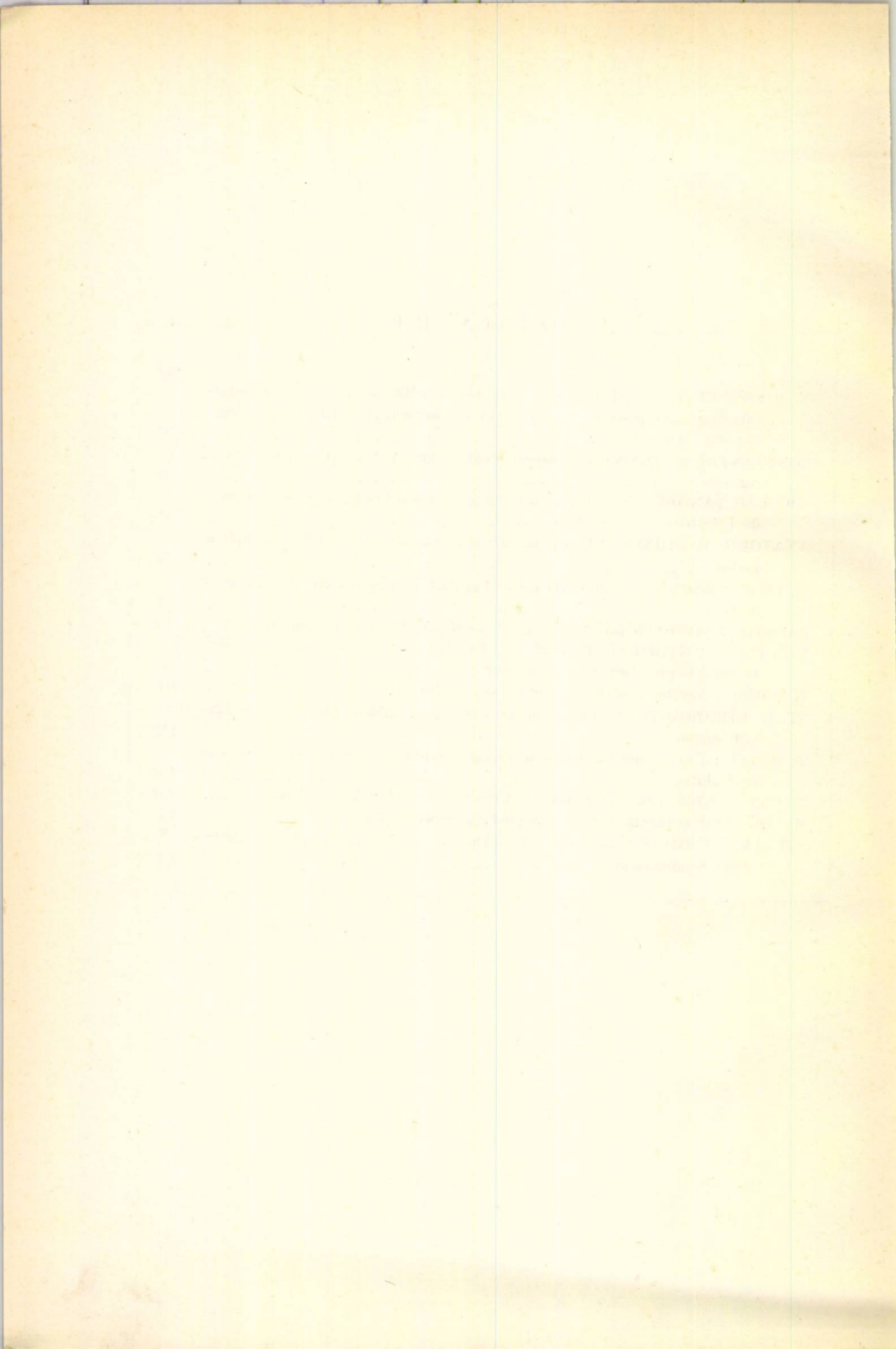
СОДЕРЖАНИЕ

	<u>стр.</u>
Н. ИОСИПЕСКУ и Д. НИКУЛЕСКУ: Новые методы испытания и экспериментальные результаты для проверки и дополнения теорий разрыва материалов	27
КОНСТАНТИН И. ПОПОВИЧ: Рассмотрение непрерывных дробей как выражений и как функций	38
НИКОЛАЕ ШАНДРУ: Представление решения плоской динамической задачи теории упругости при помощи функций комплексных переменных	44
Р. ТЕОДОРЕСКУ: Метод Монте-Карло применённый цепям с полными связями	50
АНАТОЛИЕ П. ХРИСТЕВ: Дифференциальные соотношения между четырьмя произвольными спинорными полями	69
КАБИРИЯ АНДРЕЯН КАЗАКУ: Классы римановых накрывающих, II	93
ВЕРОНИКА АНТОХИ-ТЕОДОРЕСКУ: Теорема существования решения задачи Коши для уравнения	8
ГЕОРГИЙ ЧУКУ: Об одной модели с групповыми приходами	103
ШТ. И. ГЕОРГИЦЭ: О плоском движении идеальных жидкостей в присутствии удлинённых тел	112
Т. ХУИДУ: Фотоупругое изучение некоторых задач концентраций напряжений	123
Т. ПОСТЕЛНИКУ и Н. БОНЧОКАТ: Об уравнении Ледерера	130
Е. СООС: Функции напряжения в совместных уравнениях термоупругости	141
СТЕЛИАН ТУРБАТУ: О потенциале скоростей при околосзвуковом нестационарном плоском течении	146



S O M M A I R E

	Page
N. IOSIPESCU et D. NICULESCU : Nouvelles méthodes d'essai et résultats expérimentaux pour la vérification et le complément des théories de rupture des matériaux	27
CONSTANTIN P. POPOVICI : L'aspect d'expression et de fonction des fractions continues	38
NICOLAE ȘANDRU : Sur la représentation par fonctions complexes de la solution de l'élastodynamiques plane	45
ANATOLIE P. HRISTEV : Differential Relations between four Arbitrary Spinar Fields	50
R. TEODORESCU : À Monte-Carlo method applied to chains with complete connections	68
CABIRIA ANDREIAN CAZACU : Classes de recouvrements riemanniens, I . . .	94
VERONICA ANTOHI-TEODORESCU : Un théorème d'existence des solutions de la problème de Cauchy pour l'équation des ondes itere	99
G. CIUCU : Sur un modèle de venues en groupe	103
ȘT. I. GHEORGHÎĂ : On the plane flow of perfect fluids in presence of elongated bodies	112
T. HUIDU : Étude photoélastique de certains problèmes de concentration des contraintes.	124
T. POSTELNICU and N. BONCIOCAT : About Lederer's equation	131
E. SOÓS : Strees functions in the coupled thermoelasticity	141
STELIAN TURBATU : Das Geschwindigkeitspotential in der ebenen instalationären Schallnaheströmung.	146



METODE NOI DE ÎNCERCARE ȘI REZULTATE EXPERIMENTALE PENTRU VERIFICAREA ȘI COMPLETAREA TEORIILOR DE RUPERE ALE MATERIALELOR*

N. IOSIPESCU și D. NICULESCU

În lucrările anterioare (1) și (2) s-au descris în mod amănunțit cercetările experimentale fotoelastice care au stat la baza elaborării unor noi procedee, corecte din punct de vedere științific, de încercare la forfecare pură a diferitelor materiale de construcție, cum a fost cazul de exemplu pentru: metale, lemn, beton etc. În alte lucrări apărute ulterior, menționate la (3) și (4), s-au expus de asemenea câteva din aplicațiile practice ale acestui nou procedeu, pentru încercarea unora din materialele arătate mai sus, anume a oțelurilor, cum și pentru încercarea sudurilor cap la cap.

Unele cercetări fotoelastice suplimentare au fost descrise în lucrările (5) și (6), cu care ocazie s-au expus de asemenea și principiile de bază ale, procedeelor noi de încercare la forfecare pură (7). În sfârșit, chestiunile privitoare la aplicarea procedeelor noi de încercare la forfecare pură pentru felurite materiale au constituit obiectul altor diferite publicații și comunicări, apărute în reviste tehnice și anume: acele pentru încercarea lemnului la forfecare pură în lungul fibrelor (8), pentru încercarea betonului la forfecare pură (9), ca și acele asupra diferitelor dispozitive folosite pentru încercarea metalelor și sudurilor (10), asupra căror aplicații vom trata aci, în cadrul acestei expuneri, numai din punctul de vedere arătat în titlul acestei lucrări.

În fond procedeele noi de încercare constau în realizarea unei solicitări de forfecare pură cu ajutorul unor dispozitive adecvate, produsă prin acțiunea unei forțe tăietoare simple din dreptul punctului de moment nul al unei epruvete de forma unei bare drepte supuse la o încovoiere cu variație liniară a momentului încovoiător (fig. 1), deci cu o forță tăietoare constantă pe toate lungimea ei, cum și cu un punct de inflexiune la

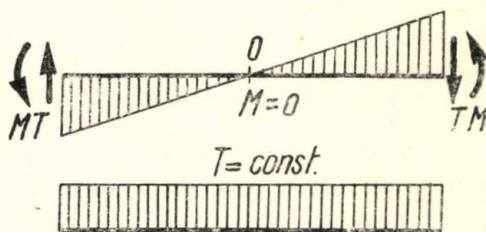


Fig. 1

* Comunicare prezentată la Sesiunea Centenarului Universității din București.

mijlocul lungimii, ceea ce poate fi realizat în modul cel mai simplu printr-un dispozitiv ca cel din (fig. 2). Pentru ruperea acestei epruvete în dreptul secțiunii de forfecare pură, prin cercetările fotoelastice efectuate s-a stabilit că, în cazul când epruveta este prevăzută în dreptul acelei secțiuni cu două creștături transversale

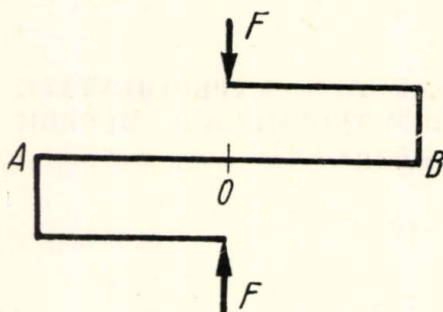


Fig. 2

în formă de V, de unghiuri la fund de câte 90° și de adâncimi egale cu câte un sfert din înălțimea ei, în secțiunea minimă dintre fundurile acelor creștături se produc tensiuni tangențiale pure de valori maxime în fiecare punct și uniform distribuite în sensul înălțimii secțiunii.

$$\tau_{xy} = \tau_{max} = \text{const.},$$

care duc până în cele din urmă la ruperea acelei epruvete, exact în aceea secțiune și numai sub acțiunea acelor tensiuni tangențiale.

Pentru încercarea metalelor și sudurilor la forfecare pură, prin procedeul stabilit pe baza principiilor dezvoltate în lucrările anterioare, cum și pentru stabilirea condițiilor necesare în vederea unei standardizări a procedului nou de încercare, s-au folosit patru tipuri de dispozitive de solicitare principal asemănătoare, dar de diferite mărimi și moduri de acționare a lor, cum și trei tipuri de epruvete de diferite mărimi, pe care le recapitulăm pe scurt aici și anume :

A. Dispozitive de solicitare

1. Dispozitiv mare, solicitat printr-un efort de compresiune (fig. 3a);
- 2 a) Dispozitiv mijlociu, solicitat printr-un efort de compresiune (fig. 3b);
- 2 b) dispozitiv mijlociu, solicitat cu un efort de întindere (fig. 3 c);
- 3 Dispozitiv mic, solicitat cu un efort de întindere (fig. 3 d).

Toate aceste dispozitive de solicitare au fost executate în bune condițiuni la atelierele BAC din cadrul INCERC.

B. Tipuri de epruvete

1. Epruvete mari, de dimensiuni de $l \times h \times b = 200 \times 40 \times 10$ mm, folosite pentru încercări de rupere de mai mare precizie, cum și pentru determinarea curbei caracteristice la lunecare, fiind solicitate cu ajutorul dispozitivului mare (A. 1).

2. Epruvete mijlocii sau normale, de trei forme : a) epruvete simple, de dimensiuni $l \times h \times b = 100 \times 20 \times 10$ mm, cu o singură

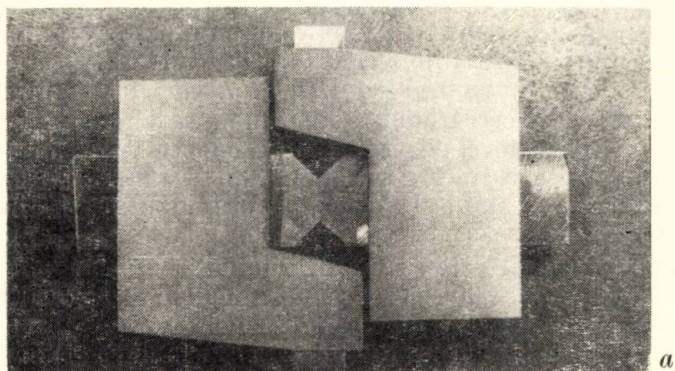
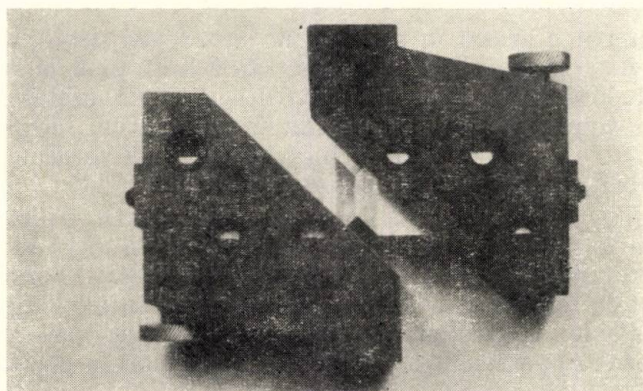
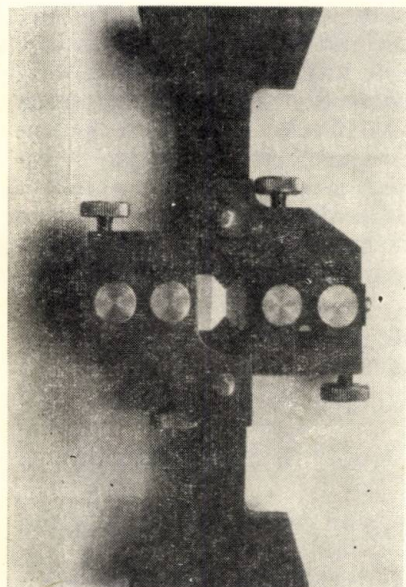
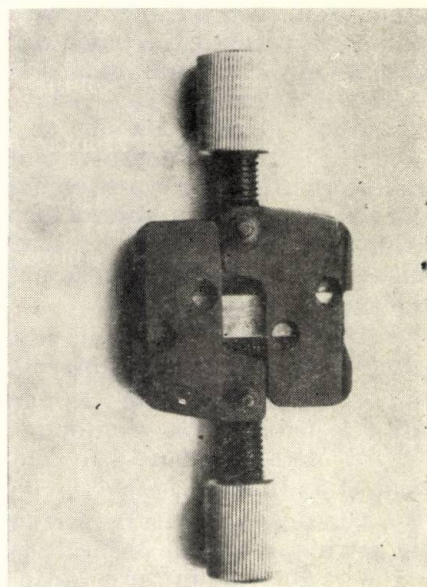
*a**b**c**d*

Fig. 3

secțiune de rupere; b) epruvete duble, de dimensiuni de $160 \times 20 \times 10$ mm, cu două secțiuni de rupere; c) epruvete triple, de dimensiuni de $220 \times 20 \times 10$ mm, cu trei secțiuni de rupere; cele de la punctul a) sînt folosite pentru încercări obișnuite de rupere la forfecare pură pentru oțeluri și alte metale, cum și pentru încercarea sudurilor, iar cele de la punctele b) și c) numai pentru încercarea sudurilor, în paralel cu aceea a oțelului pieselor sudate, fiind solicitate cu ajutorul dispozitivelor mijlocii (A. 2 a și A. 2 b).

3. Epruvete mici, de dimensiuni de $1 \times h \times b = 50 \times 10 \times 5$ mm, folosite pentru încercarea sudurilor din cordoane, cum și a altor metale, fiind solicitate cu ajutorul dispozitivului mic (A. 3).

★

După cum s-a arătat în publicațiile anterioare citate, aceste dispozitive de solicitare și tipuri de epruvete s-au folosit pînă acum, începînd din anul 1961, la diferite aplicații și cercetări asupra oțelului șinelor de cale ferată și asupra sudurilor de la joănteale acelor șine, lucrări executate în cadrul I.C.T.Te., cum și asupra încercărilor la forfecare pură a altor metale, în cadrul unor cercetări realizate la I.N.C.E.R.C.

O altă categorie importantă de încercări efectuate cu ajutorul acestui procedeu, prin folosirea dispozitivului de solicitare A. 2 a și cu tipul de epruvetă B. 2 a, au fost acele realizate pentru încercările comparative ale diferitelor metale feroase și neferoase, considerate în mod separat numai după tehnologia lor de producere, în special din cele două puncte principale de vedere: a) pentru metalele laminate și b) pentru metalele turnate.

Urmărindu-se deci numai stabilirea unor principii metodologice de încercare, care să caracterizeze aceste două categorii principale de metale, laminate și turnate, din punct de vedere al modului lor de rupere la încercările de forfecare pură, cum și la încercările de întindere, epruvetele s-au realizat din unele probe absolut oarecare, scoase din materialele metalice depozitate în magazia de materiale la Atelierele BAC, din cadrul I.N.C.E.R.C., sau procurate în alt mod. Nu s-a urmărit a se obține nici o altă informație asupra provenienței, a analizei și a compoziției lor chimice, cum și a proporției de aliere a lor, pentru cazul aliajelor, singura informație care a interesat fiind aceea dacă proba din metalul cercetat provenea dintr-o operație tehnologică de laminare sau de turnare a produsului respectiv.

În acest sens s-au făcut cîte cinci serii de încercări prin ruperi de cîte patru epruvete, pentru diferitele metale turnate, cercetate și anume:

a) Metale laminate: 1. duraluminu; 2. oțel OL 42; 3. alamă laminată; 4. cupru și 5. aluminu laminat.

b) Metale turnate: 1. zinc turnat; 2. fontă; 3. alamă turnată; 4. bronz și 5 aluminu turnat.

Din fiecare serie a fiecărei probe în parte, s-au confecționat și încercat cîte patru epruvete de forfecare pură, de dimensiuni medii de $1 \times h \times b = 100 \times 20 \times 9$ mm, prevăzute cu creștături verticale și orizontale și cu

secțiunile de rupere la forfecare pură de circa $10 \times 4 = 40 \text{ mm}^2$ (fig. 4), cum și cîte patru epruvete de încercare la tracțiune de dimensiuni mici, anume de $\varnothing 6 \text{ mm}$ și de o lungime totală $l_t = 100 \text{ mm}$, conform STAS 200/61 (fig. 5).

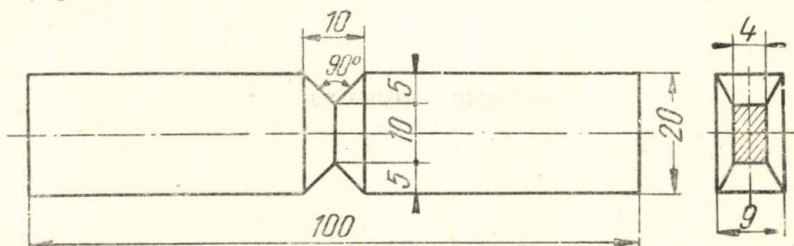


Fig. 4

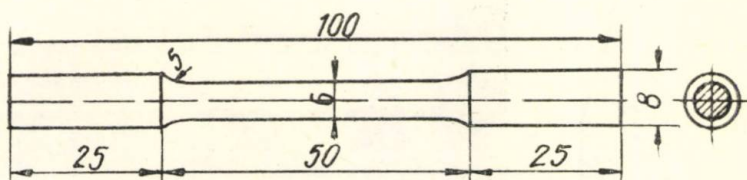


Fig. 5

★

Din tratatele de specialitate existente asupra încercării și ruperii materialelor, cum sînt acele ale lui Nadai (11), Ros și Eichinger (12), Davis, Troxell și Wiskocil (13), Ponomariov (14), Joseph Marin (15) etc., modurile de rupere ale tuturor materialelor se caracterizează doar prin cele două aspecte mai importante ale lor, considerate în special din punct de vedere al ruperilor la eforturi de întindere simplă.

1. *Ruperi plastice*, numite de către unii autori și ruperi *ductile*, datorită faptului că sînt precedate de deformații importante de curgere plastică la întindere, sub acțiunea eforturilor normale (σ), sau la lunecare, sub acțiunea eforturilor tangențiale (τ), cum și cu stricțiuni importante în dreptul secțiunii de rupere la întindere;

2. *Ruperi casante sau fragile*, caracterizate prin smulgeri bruște, fără deformații plastice importante, produse în special sub acțiunea eforturilor normale de rupere (σ_r), pe toată secțiunea de întindere, fără nici un fel de stricțiune, sau cu o stricțiune neînsemnată a epruvetei de întindere.

La aceste două categorii se poate adăuga, din punct de vedere practic, o a treia:

3. *Ruperi mixte*, cum sînt acele ale unora din metalele plastice încercate la întindere, la care ruperile se produc în mod diferit pe diferitele părți ale secțiunii transversale a epruvetei cilindrice de întindere: anume la smulgeri, sub acțiunea tensiunilor normale σ_r , pe partea centrală a

secțiunii, deci în fundul craterului, și la lunecare, sub acțiunea tensiunilor tangențiale τ , de valori maxime, din direcții înclinate la 45° față de direcția principală de acțiune a tensiunii de întindere σ_1 , pentru porțiunea inelară din apropierea conturului circular al epruvetelor cilindrice rupte la întindere (fig. 6).

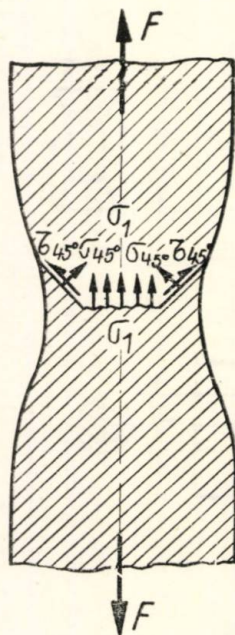


Fig. 6

Aceste încercări de întindere ale materialelor, avînd drept scop de a studia cazul cel mai simplu al unei solicitări monoaxiale, ducînd la posibilitatea determinării curbelor caracteristice de variație „tensiuni - deformații” ale materialelor, constituie de fapt o stare de tensi-

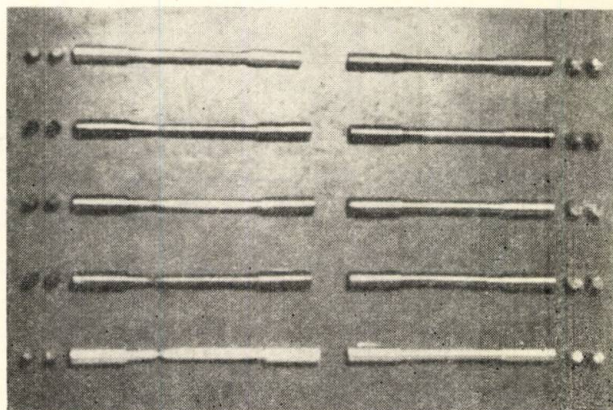


Fig. 7

uni și de deformații tridimensionale, care trebuie să fie considerată ca atare. Încercările de forfecare pură, așa cum au fost definite și rezolvate prin procedeele noi de încercare, constituie de fapt o stare de tensiuni și de deformații bidimensionale din cazul problemei plane, care va fi considerată în consecință aci.

Cu tot aspectul ei simplu, una din cele mai complexe stări de tensiuni și de moduri de rupere ale materialelor este aceea de la încercarea de compresiune, atît pentru materialele cu ruperi plastic-ductile, dar mai ales și cu atît mai mult, a acelor cu ruperi fragil-casante. În această privință unii autori remarcabili, cum este cazul lui Ros și Eichinger (12), au fost nevoiți să introducă și să admită unele noțiuni vagi, cum este aceea a existenței unor așa numite „tensiuni vagabonde”, asupra cărora nu se poate da nici o informație precisă și care s-ar putea evita pentru unele cazuri, printr-o examinare mai amănunțită a problemei ruperii la compresiune, ceea ce se va dezvolta într-o lucrare viitoare.

★

Din încercările de rupere la întindere ale epruvetelor din metalele laminate indicate mai sus, reproduse în partea stîngă a fotografiei din fig. 7, în ordinea indicată anterior, s-a constatat că ruperile acestora

s-au produs în mod plastic-ductil, cu tendința pronunțată de curgere plastică sub acțiunea tensiunilor tangențiale τ . Astfel, de exemplu, pentru cazul duraluminiului s-a constatat că pentru epruvetele de forme cilindrice ruperea la tensiunile de întindere simplă σ_1 se produce, la marea majori-

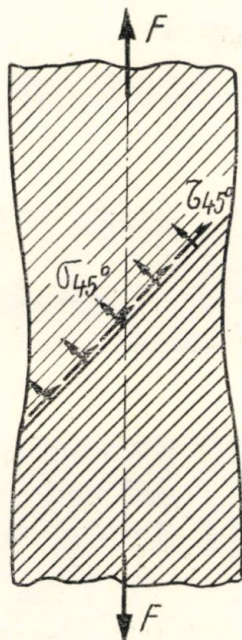


Fig. 8

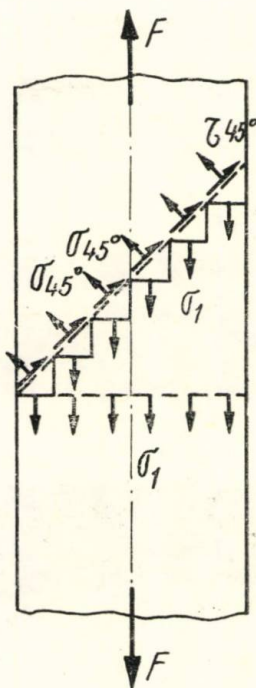


Fig. 9

tate a epruvetelor, în secțiuni înclinate la 45° (fig. 8), după care se produc și tensiunile tangențiale de valori maxime, adică $\tau_{45^\circ} = \tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2}$ (fig. 9), pe acele secțiuni existînd însă și tensiuni normale de valori corespunzătoare, $\sigma_{45^\circ} = \frac{\sigma_1}{2}$, după cum rezultă din cercul lui Mohr al stării de ten-

siuni respective. În dreptul acelei secțiuni de rupere se produce și o ușoară stricțiune a epruvetei din duraluminu, mult mai mică decît aceea de la oțelul OL 42 și de la alamă. Pentru un număr mult mai redus de epruvete de forme cilindrice de întindere din același metal, ruperea s-a produs după mai multe plane înclinate la 45° , sub forma unor colți ascuțiți, cu fețele înclinate cu aceste unghiuri, deci cu aceeași tendință, de rupere sub acțiunea tensiunilor tangențiale maxime din direcții înclinate la 45° .

Pentru alte metale laminate, de exemplu pentru oțel OL 38, ruperea la sollicitare de întindere s-a produs prin lunecări în plane înclinate la 45° , numai în cazul epruvetelor de forme plate sau de platbande, în sensul

grosimii, după cum s-a constatat pe epruveta din OL 38 de secțiune de $31,4 \times 10$ mm, ruptă ca în fig. 10 *a* și *b*.

Alte epruvete de tracțiune de forme cilindrice de $\varnothing 6$ mm, confecționate din metale laminate, cu ruperi ductile, din oțel OL 42, alamă,

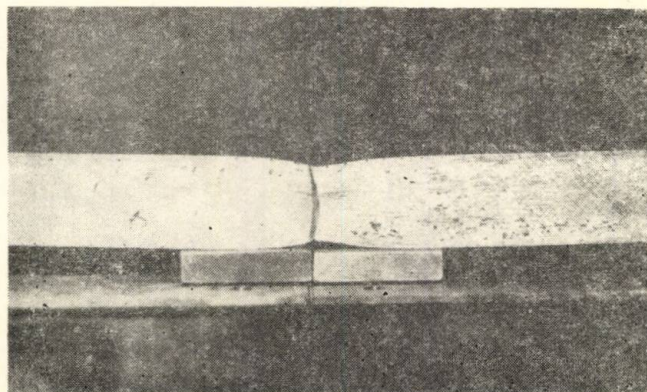
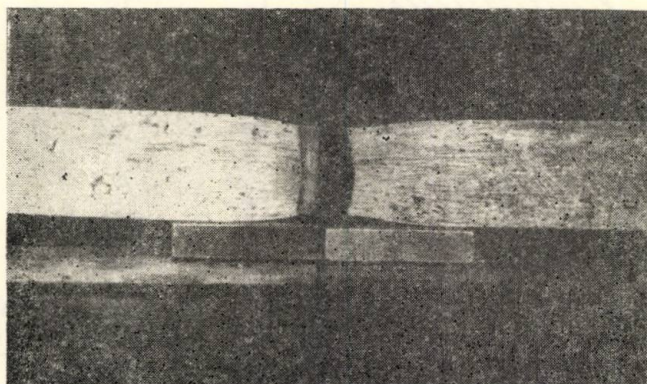
*a**b*

Fig. 10

cupru etc., s-au rupt tot sub forma mixtă, adică în formă de crater, la smulgere în porțiunea centrală a secțiunii de rupere și la lunecare pe coroana circulară de contur, conform indicațiilor din fig. 6. O caracteristică comună a acestor ruperi mixte, ale tuturor celor trei metale laminate indicate mai sus și anume : oțel. OL 42, alamă și cupru, a fost aceea că forma craterului este de cele mai multe ori antisimetrică, adică buza lui este îndreptată către un capăt al epruvetei, pentru o parte a conturului circular al secțiunii de rupere, și către celălalt capăt, pentru cealaltă parte a conturului secțiunii epruvetei (fig. 11).

Aceasta indică acolo aceeași tendință de rupere plastică prin lunecare, la acțiunea tensiunilor tangențiale de valori maxime din direcții înclinate la 45° , $\tau_{max} = \tau_{45^\circ} = \frac{\sigma_1}{2}$, cum și la eforturile normale respective, $\sigma_{45^\circ} = \frac{\sigma_1}{2}$ din aceeași secțiune. Această tendință este realizată complet numai pentru porțiunile din apropiere de conturul epruvetei, din cauza tendinței simultane de producere a stricțiunii, și este întreruptă pentru partea centrală a secțiunii de rupere, din cauza influenței mai mari de rupere a lui σ_r din acea porțiune centrală a secțiunii.

Epruvetele de tracțiune din aluminiu tehnic pur s-au rupt numai după o curgere mult mai pronunțată și după o stricțiune de o valoare extremă, ceea ce caracterizează aspectul plastic-ductil pronunțat al acestui material, care-l face apt să poată fi prelucrat prin operația tehnologică de „extrudare”, care cere o plasticitate deosebită a materialului. Cuprul a

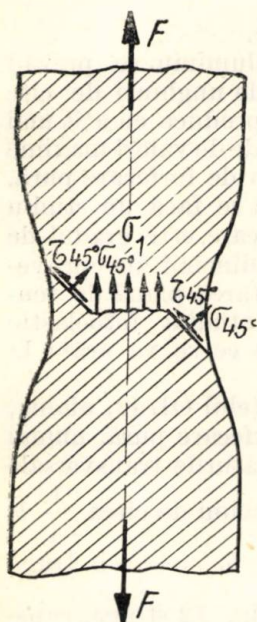


Fig. 11

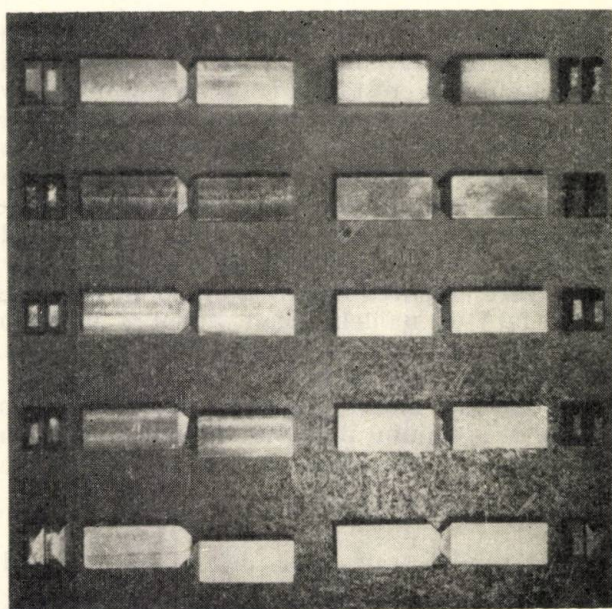


Fig. 12

arătat de asemenea o rupere cu o curgere plastic ductilă pronunțată, deși mai redusă decât la aluminiu, cu aspect în formă de crater anti-simetric a secțiunii de rupere la întindere.



În mod corespunzător, ruperea epruvetelor de forfecare pură confecționate din metalele respective laminate, reproduse în partea stângă a fotografiei din fig. 12, în ordinea succesivă indicată anterior, s-a produs în mod caracteristic tendinței de rupere la lunecare, prin tensiunile tangen-

țiale pure din secțiunea de forfecare pură, cu valori maxime și uniform distribuite ale acelor tensiuni tangențiale τ . Pentru cazul duraluminiului, de exemplu, ruperea la lunecare în secțiunea de forfecare pură s-a produs în mod foarte categoric, într-o secțiune aproape netedă, pe întreaga secțiune de forfecare pură dintre fundurile creștăturilor în formă de V, de unghiuri la fund de 90° și de adâncimi $a = \frac{1}{4} h$.

Din încercările făcute în cadrul acestei cercetări, s-a constatat că duraluminiul este singurul metal care se rupe în bune condițiuni, în mod simultan pe toată secțiunea de forfecare pură, chiar și în cazul existenței numai a creștăturilor verticale, fără a mai fi nevoie de a slăbi în mod suplimentar acea secțiune prin creștături laterale orizontale, care să micșoreze secțiunea de forfecare pură la jumătate din valoare ei, prin micșorarea lățimii la jumătate ($b_1 = \frac{1}{2} b$), așa cum s-a arătat în publicațiile anterioare că este necesar la toate celelalte metale.

Natural că, în cazul cînd epruvetele din duraluminiu se prevăd și cu asemenea creștături transversale în formă de V, de unghiuri de cîte 120° , în dreptul secțiunii de forfecare pură, ruperea se produce cu atît mai mult în condiții bune, sub acțiunea tensiunilor tangențiale de valori maxime și uniform distribuite, în sensul înălțimii, pe secțiunea de forfecare pură. Aceasta va permite ca, cu ajutorul acestui material, să se facă un studiu comparativ util, pentru a se putea constata dacă și care este gradul de influență al creștăturilor laterale de diferite forme și adâncimi ale epruvetelor, care ar putea modifica într-o oarecare măsură starea plană de tensiuni, față de modelul plan solicitat bidimensional studiat fotoelastic care a stat la baza noului procedeu de încercare, ceea ce se va arăta la sfîrșitul studiului de față.

Celelalte metale laminate încercate și anume: oțelul OL 42, alama, cuprul și aluminiul pur, s-au rupt la solicitările de forfecare pură, numai în cazul cînd epruvetele au fost prevăzute și cu creștăturile transversale laterale în formă de V, cu unghiurile de 120° și de adâncimi de circa $\frac{1}{4} b$, cînd lățimile secțiunilor de rupere se reduc la $b_1 = \frac{1}{2} b$. După

cum se constată și din fotografia acelor epruvete din fig. 12 stînga, rupe-
rile s-au produs după o deformare de curgere plastică, mai mult sau mai puțin pronunțată, mergînd în ordinea în care au fost încercate. Duraluminiul are cea mai mică deformare de lunecare, după care urmează apoi oțelul OL 42 și alama. Cazul cuprului este caracterizat prin faptul că ruperea la forfecare pură nu se produce decît după ce curgerea plastică de lunecare a depășit o limită oarecare, care este de circa $1/3$ din înălțimea secțiunii de forfecare pură, ceea ce corespunde cu marea plasticitate a acestui material pentru curgere și rupere.

O plasticitate și mai pronunțată a manifestat-o aluminiul tehnic pur, ale cărui epruvete de forfecare pură s-au deformat prin curgere plastică pe o distanță egală cu circa $2/3$ din înălțimea secțiunii de forfecare

pură, dintre virfurile de unghi ale creștăturilor verticale, fără ca materialul să se rupă. Astfel că în cazul încercării la forfecare pură, realizată cu dispozitivul de solicitare A. 2 a pentru epruvetele din aluminiu tehnic pur, la început nici nu s-a putut merge pînă la rupere, sub deformația pronunțată de curgere plastică, din cauza ajungerii la contact a epruvetei cu piesele dispozitivului de solicitare. Din această cauză acel dispozitiv a trebuit să fie modificat apoi, pentru a permite o deplasare suficientă prin curgerea plastică, mergînd pînă la rupere, a epruvetei de aluminiu tehnic pur, așa cum este realizat de fapt dispozitivul din fig. 3 b.

★

Rezultatele încercărilor la întindere și ale acestora la forfecare pură, făcute pentru cele cinci categorii de metale laminate, sînt trecute în tabela 1. Se constată din această tabelă că o caracteristică importantă

TABELA 1

de rezultatele comparative ale încercărilor de forfecare pură și de întindere pentru diferite metale

METALE LAMINATE

Seria probe-lor	Materialul epruvetelor	Nr. epruv.	Încercări la forfecare pură		Încercări la întindere		Raport $K_r = \frac{\tau_r}{\sigma_r}$
			Rezist. τ_r kg/mm ²	Rezist. τ_r medii kg/mm ²	Rezist. σ_r kg/mm ²	Rezist. σ_r medii kg/mm ²	
I	Oțel OL 42	1	37,5		49,2		
		2	38,2		49,4		
		3	41,5		50,4		
		4	41,5	39,70	49,2	49,55	0,80
II	Duraluminiu	1	32,2		46,4		
		2	31,5		45,3		
		3	30,9		44,7		
		4	31,3	31,48	45,2	45,40	0,69
III	Alamă laminată	1	30,5		40,7		
		2	30,8		41,7		
		3	32,9		41,4		
		4	33,3	31,78	41,7	41,38	0,77
IV	Cupru laminat	1	20,7		26,0		
		2	20,8		27,0		
		3	22,9		26,9		
		4	23,1	21,88	28,1	27,00	0,81
V	Aluminiu laminat	1	6,42		7,6		
		2	6,91		7,2		
		3	6,69		7,2		
		4	6,69	6,68	7,4	7,35	0,91

a modului de rupere al fiecărui metal este dată respectiv de către raportul :

$$K_r = \frac{\tau_r}{\sigma_r} < 1,$$

a cărui valoare este subunitară pentru toate aceste materiale, fiind stabilită pe baza mediilor rezultatelor încercărilor fiecărui metal trecute în tablou. Se constată că acest raport variază cu gradul de ductilitate sau plasticitate a metalului respectiv, pe care le caracterizează foarte bine, fiind subunitar pentru toate metalele laminate încercate, ceea ce era natural să se întâmple, deoarece metalele de acest fel se rup de preferință la acțiunea tensiunilor tangențiale, avînd deci :

$$\tau_r < \sigma_r$$

Încercările aluminiului tehnic pur nu au fost suficient de concludente, deoarece pentru acest metal, atît deformația produsă prin lunecare la forfecare pură, cît și alungirea totală și stricțiunea la ruperea de întindere sînt exagerat de mari, ceea ce face ca pentru acest metal să nu se poată aplica modul obișnuit de considerare de la celelalte metale încercate, raportînd efortul total axial de rupere la secțiunea inițială a epruvetei. Ar fi necesar să se stabilească cu mai mare precizie limitele de curgere ale acestui material la forfecare (τ_c) și la întindere (σ_c), între care ar fi util să se stabilească raportul :

$$K_c = \frac{\tau_c}{\sigma_c},$$

pe care-l putem numi constanta de plasticitate la curgere, care reprezintă în mod mai precis caracteristica de plasticitate a metalului respectiv. Bineînțeles că și pentru celelalte metale ar fi interesant de stabilit atît valorile lui K_r , cît și pe acele ale lui K_c , corespunzătoare ruperii și curgerii.

Valorile rapoartelor ale lui K_r , caracterizînd modul de rupere al acestor metale laminate, sînt trecute în tabela 1, în ultima ei coloană. Se constată, pentru cazurile cercetate, că valorile acestor constante de plasticitate la rupere ale metalelor laminate încercate, stabilite aci numai în mod provizoriu prin aceste cercetări, din cauza numărului mic de încercări efectuate, sînt următoarele :

1. Pentru duraluminu	$K_r = 0,69$
2. „ alama	$K_r = 0,77$
3. „ oțel OL 42	$K_r = 0,80$
4. „ cupru	$K_r = 0,82$
5. „ aluminu $\left(K_c = \frac{\tau_c}{\sigma_c} \right)$	$K_r = 0,91$ (aproximativ)

★

Pentru cazul metalelor turnate s-au făcut de asemenea cîte 4 încercări la întindere, pe epruvete mici de $\varnothing = 6$ mm și de $l_t = 100$ mm, cum și cîte 4 încercări la forfecare pură, pe epruvete mijlocii de tipul B 2 a, confecționate din metalele turnate menționate anterior. Se constată, din partea dreaptă a fotografiei acestor epruvete din fig. 7, că toate aceste ruperi ale metalelor turnate s-au produs în mod casant, cu ieșirea în evidență în ruptură a cristalelor sau cristalitelor (în cazul zincului, fontei

și aluminului turnat de exemplu), cum și a aspectului structurii neomogene a aliajelor (în cazul alamei și a bronzului de exemplu).

Ruperile epruvetelor de încercare la întindere confecționate din metalele turnate, s-au produs toate în mod casant, în secțiuni normale pe direcția efortului de întindere, cu aspect grăunțos mai mult sau mai puțin fin, pentru alama turnată, fontă, bronz și aluminu turnat, ajungând până la prezența unor cristale mari, de dimensiuni apropiate de acele ale secțiunii epruvetei, pentru cazul zincului, cu fețele de separație ale rupturii produse în acest caz după fețele cristalelor, cu un aspect lucios. Ruperile s-au produs în mod foarte categoric, în secțiunile transversale ale epruvetelor, fără stricțiuni și gîtuituri apreciabile; pentru unele din aceste materiale, ca fonta și aluminu turnat, ruperile s-au produs mai ales în apropiere de racordările curbe dinspre capetele epruvetei. Pentru cazul aliajelor, ca alama și bronzul, s-a constatat că ruperea se produce în unele cazuri la întindere excentrică, produsă din cauza lipsei de omogenitate a metalelor aliate, pe o parte a secțiunii față de alta, ceea ce produce o dezaxare locală a efortului longitudinal.

★

Încercările la forfecare pură ale epruvetelor din metale turnate de dimensiuni de $100 \times 20 \times 9$ mm, prevăzute cu creștături unghiulare verticale de 90° , de adîncimi de cîte 5 mm și cu creștături laterale de 120° , de adîncimi de cîte 2,5 mm, au dus la ruperi specific casante, cu aspect grăunțos în secțiunile de forfecare pură, după cum se constată din partea dreaptă a fotografiei acestor epruvete din fig. 12. Aceasta arată că în aceste cazuri ruperea nu se produce direct la lunecare, sub acțiunea tensiunilor tangențiale τ din secțiunea de forfecare pură, ca la metalele laminare cu ruperi plastice, ci după direcțiile principale ale tensiunilor normale de întindere σ_1 din direcții înclinate la 45° față de secțiunea de forfecare pură, deci în formă de trepte (fig. 13), conform ipotezei lui Mörsch (16), valabilă pentru cazul betonului dar și pentru acelu al fontei, sau chiar după afirmația paradoxală a lui Vallette (17), care este valabilă însă numai pentru asemenea materiale cu ruperi casante.

În unele cazuri, pentru zincu turnat de exemplu, cu cristale foarte mari, cum și pentru bronz, forfecarea pieselor se produce cel mai ades prin smulgerea și răsturnarea cristalelor sau cristalitelor și nu prin tăierea lor, ceea ce dă un aspect foarte neregulat secțiunii de rupere la forfecare pură a epruvetei. Aceste moduri de rupere arată marea diversitate a comportării materialelor, justificînd afirmația lui Ros și Eichinger (12) că fiecare material se rupe în felul său.

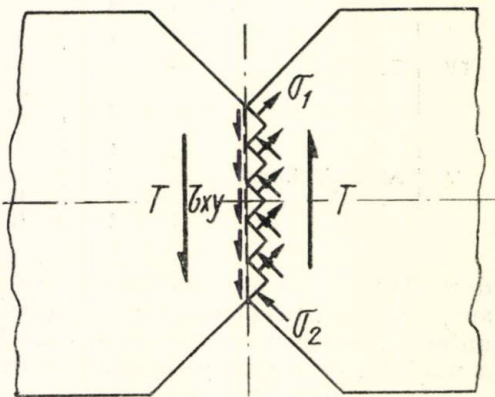


Fig. 3

★

Rezultatele acestor încercări ale celor cinci categorii de metale turnate cercetate sînt date în tabela 2, atît pentru încercările la forfecare pură, cît și pentru acele de întindere. Se constată că, în cazul alamei turnate rezultatele au o împrăștiere mult prea mare la încercările de întin-

TABELA 2

de rezultatele comparative ale încercărilor de forfecare pură și de întindere pentru diferite metale

METALE TURNATE

Seria probe- lor	Materialul epruvetelor	Nr. epruv.	Încercări la forfecare pură		Încercări la întindere		Raport $K_r = \frac{\tau_r}{\sigma_r}$
			Rezist. τ_r kg/mm ²	Rezist. τ_r medii kg/mm ²	Rezist. σ_r kg/mm ²	Rezist. σ_r medii kg/mm ²	
I	Zinc turnat	1	10,7		9,6		
		2	11,0		7,0		
		3	10,7		7,5		
		4	10,6	10,75	8,0	8,1	1,33
II	Fontă	1	18,6		14,9		
		2	16,8		14,9		
		3	17,6		14,9		
		4	17,1	17,5	14,9	14,9	1,18
III	Alamă turnată	1	18,0		20,1		
		2	18,0		9,9		
		3	21,3		21,8		
		4	18,6	19,0	11,3	15,8	1,20
IV	Bronz	1	23,2		11,5		
		2	18,4		15,9		
		3	20,1		13,1		
		4	21,1	20,7	15,7	14,1	1,47
V	Aluminiu turnat	1	15,4		13,5		
		2	14,8		12,4		
		3	15,2		8,2		
		4	13,7	15,1	10,2	11,1	1,36

dere, dar aceasta provine din cauza lipsei de omogenitate a aliajului de mai sus, cum și a probelor luate la întîmplare, după cum a fost menționat anterior. Se constată din această tabelă că aceeași constantă caracteristică a modului de rupere a metalelor turnate respective, are de data aceasta o valoare supraunitară :

$$K_r = \frac{\tau_r}{\sigma_r} > 1,$$

pentru toate aceste metale turnate, cea ce este natural să se întîmple deoarece materialele acestea se rup de preferință la acțiunea tensiunilor normale principale de întindere σ_1 , deoarece $\tau_r > \sigma_r$.

Valorile rapoartelor respective ale lui K_r , caracterizînd modul de rupere al acestor metale turnate, sînt trecute de asemenea în tabela 2, în ultima ei coloană, avînd valorile următoare, stabilite aci numai în mod provizoriu, din cauza numărului mic de încercări efectuate :

1. Pentru fontă	$K_r = 1,18$
2. „ alama turnată	$K_r = 1,20$ (aproximativ)
3. „ zinc turnat	$K_r = 1,33$
4. „ aluminiu turnat	$K_r = 1,36$
5. „ bronz	$K_r = 1,47$

Aceste rezultate, nu pot fi considerate a avea un caracter complet și definitiv, deoarece încercările făcute au fost în număr prea mic și au fost făcute pe probe luate la întîmplare, de proveniențe necunoscute; singura caracteristică pe care s-a bazat alegerea lor a fost doar aceea că pentru unele din probe modul de producere tehnologică a fost acel de laminare, iar pentru celelalte a fost acel de turnare. Ele au putut totuși servi pentru stabilirea unei tehnologii de încercare, în vederea aplicării unui nou criteriu de caracterizare a metalelor, din punct de vedere al rupei și curgerii lor, prin stabilirea valorii constantelor $K_r = \frac{\tau_r}{\sigma_r}$ sau $K_c = \frac{\tau_c}{\sigma_c}$.

Fiecare metal, de o tehnologie sau alta de fabricare a lui, laminat sau turnat, va putea să aibă determinate, prin încercările de forfecare pură executate pe epruvete de $100 \times 20 \times 10$ mm, conform noului procedeu de încercare, valoarea lui τ_c , cum și aceea a lui τ_r , iar prin încercările de întindere respective, făcute pe epruvete mici de $\varnothing 6$ mm și $l_t = 100$ mm, valorile lui σ_c și σ_r . Astfel că, pentru fiecare caz, se poate calcula valoarea constantelor :

$$K_r = \frac{\tau_r}{\sigma_r} \text{ și } K_c = \frac{\tau_c}{\sigma_c},$$

constatîndu-se dacă acele valori sînt subunitare sau supraunitare, după cum metalul este laminat sau turnat, cum și determinîndu-se care sînt acele valori pentru fiecare metal considerat.

Mai mult decît atît, procedeul se poate extinde și pentru stabilirea valorii acestei constante de plasticitate de rupere pentru alte cazuri de tehnologii de producere a metalelor : forjare, matrițare, trefilare, ambutisare, extrudare, sudare etc. pentru a se putea compara între ele valorile acestor constante stabilite pentru aceleași materiale, dar și pentru moduri și tehnologii diferite de producere a lor. De asemenea ar fi de o importanță deosebită stabilirea valorilor acestor constante de plasticitate la rupere pentru aceleași metale cu diferite tratări termice, sau alte modificări de structură, pentru a se constata direct cum se modifică în sens favorabil modul de comportare la rupere prin acele tratamente.

Ca o altă aplicație importantă ce ar putea fi făcută în viitor pentru a constata influența mai precisă a operațiilor de laminare a oțelului, ar fi interesant de urmărit și stabilit, prin încercări de forfecare pură și de

tracțiune, care este variația constantelor $K_r = \frac{\tau_r}{\sigma_r}$ (la rupere) și $K_c = \frac{\tau_c}{\sigma_c}$ (la curgere), pentru probe succesive obținute din aceeași șarjă de oțel prelucrat, la diferitele faze de laminare a lui, mergînd pînă la cea finală, a produsului finit, calculîndu-se valorile lui K_r și K_c și determinîndu-se modul de variație a lor, în funcție de înaintarea procesului de modificare treptată a structurii interioare a metalului prin operațiile de laminare succesive.

★

O altă cercetare, realizată cu această ocazie, a fost aceea privitoare la studierea modului comparativ de acțiune a creștăturilor transversale ale epruvetelor, de diferite forme și dimensiuni. Profitînd de faptul că duraluminiul este un metal care se rupe în condiții excepțional de bune la solicitarea de forfecare pură pe modele plane, chiar și de forma stabilită prin cercetarea fotoelastică, deci fără creștăturile transversale din sens lateral de slăbire a secțiunii de forfecare pură, așa cum este necesar pentru toate celelalte metale, s-au făcut următoarele patru categorii de încercări comparative, executate pe epruvete de forfecare pură scoase dintr-o aceeași probă din acest metal, de dimensiuni de cîte $100 \times 20 \times 9$ mm și anume :

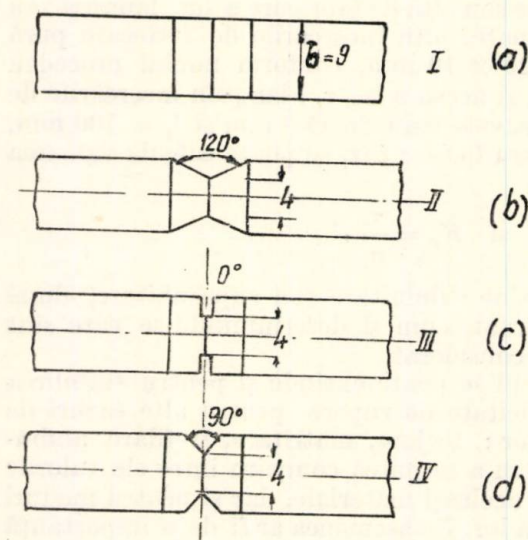


Fig. 14

- I — Cinci epruvete de lățimi de $b=9$ mm, prevăzute numai cu creștături verticale de 90° și de adîncimi de cîte 5 mm, fără creștături laterale (fig. 14 a).
- II — Idem, cinci epruvete cu creștături laterale în formă de V de 120° și de adîncimi de cîte 2,5 mm (fig. 14 b).
- III — Idem, cinci epruvete cu creștături laterale în formă de U, de 0° și de adîncimi de cîte 2,5 mm (fig. 14 c).
- IV — Idem, cinci epruvete cu creștături laterale în formă de V, de 90° și de adîncimi de cîte 2,5 mm (fig. 14 d).

Încercînd toate aceste epruvete la forfecare pură, cîte 5 bucăți de fiecare tip, cu ajutorul dispozitivului de solicitare A 2 a din fig. 3 b, s-au obținut rezultatele din tabela 3, în care sînt trecute în ultima coloană mediile respective.

Se constată că rezultatele acestor încercări comparative sînt foarte apropiate între ele (diferența maximă a lor nedepășind valoarea împrăștierii fiecărei serii în parte, pentru mediile tuturor celor patru feluri de încercări, corespunzătoare mai întîi lipsei creștăturilor transversale și

apoi diferitelor forme respective ale acestora, dar de aceleași adâncimi. Aceasta arată suficient de bine că nici una din cele trei feluri de creștături transversale, de formele de la grupele II, III și IV de încercări, nu produce concentrări apreciable de tensiuni tangențiale în sens lateral și deci nici

TABELA 3

de rezultatele încercărilor comparative de forfecare pură a unor epruvete din duraluminu cu și fără creștături laterale, pentru a stabili influența creștăturilor laterale de diferite forme

Seria probelor	Felul epruvetelor	Nr. epr.	Secțiuni			Forța de rupere în kg	Rezist. la forfecare în kg/mm ²	Valori medii τ_r	Obs.
			b în mm	h în mm	supr. în mm ²				
I	Epruvete cu secțiune plină, fără creștături laterale	1	9,2	10,2	93,84	2.620	27,92	28,83	Vezi fig. 13 a
		2	9,2	10,2	93,84	2.750	29,31		
		3	9,1	10,1	91,91	2.700	29,38		
		4	9,1	10,2	92,82	2.720	29,30		
		5	9,2	10,0	92,00	2.600	28,26		
II	Epruvete cu creștături laterale în formă de V, unghi de 120°	6	4,1	10,0	41,00	1.120	27,31	28,55	Vezi fig. 13 b
		7	4,0	10,0	40,00	1.100	27,50		
		8	4,1	9,9	40,59	1.200	29,56		
		9	4,1	10,0	41,00	1.200	29,27		
		10	4,2	10,0	42,00	1.200	28,57		
III	Epruvete cu creștături laterale în formă de U, unghi de 60°	11	4,2	10,2	42,84	1.200	28,01	28,76	Vezi fig. 13 c
		12	4,2	10,0	42,00	1.200	28,57		
		13	4,0	10,0	40,00	1.200	30,00		
		14	4,1	10,1	41,41	1.200	28,98		
		15	4,1	10,0	41,00	1.200	29,27		
IV	Epruvete cu creștături laterale în formă de V, unghi de 90°	16	3,9	10,0	39,00	1.080	27,69	28,20	Vezi fig. 13 d
		17	4,0	10,0	40,00	1.165	29,12		
		18	3,8	9,8	37,24	1.025	27,53		
		19	4,0	10,0	40,00	1.100	27,51		
		20	3,9	9,8	38,22	1.115	29,17		

o variație pronunțată a valorilor tensiunilor tangențiale în sensul lățimii. Astfel că aceste creștături laterale nu au putut să ducă la falsificarea rezultatelor obținute cu aceste feluri de epruvete, față de cazul plan, fără creștături transversale, considerat pentru grupa I de încercări, deci față de cazul stabilit prin cercetarea fotoelastică inițială, care a stat la baza procedurii nou de încercare la forfecare pură.

★

Concluziile finale ce au putut fi scoase din rezultatele încercărilor efectuate în cadrul acestei lucrări, sînt următoarele :

1. Prin încercările de forfecare pură realizate pe baza procedurii nou, corect din punct de vedere principal, se obțin ruperi prin lunecare la acțiunea tensiunilor tangențiale limită (τ_r) pentru toate metalele laminate, cu ruperi plastic-ductile, confirmînd astfel valabilitatea teoriei tensiunilor tangențiale maxime pentru acest fel de materiale;

2. S-a constatat că rupele prin smulgere, numai la acțiunea tensiunilor normale de întindere σ_1 ajunse la limita de rupere (σ_r), se produce pentru metalele turnate, cu rupele fragil-casante, confirmând astfel valabilitatea teoriei tensiunilor normale maxime pentru acest fel de materiale;

3. Clasificarea clasică a materialelor din punct de vedere al modului lor de rupere, în materiale cu rupele plastic-ductile și în materiale cu rupele fragil-casante, chiar și sub forma extinderii ei cu caracteristicile extreme: de rupele foarte plastice și rupele foarte casante, cum și cu starea intermediară de rupele fragil-plastice, este insuficient de concludentă. Prin determinarea constantei de caracterizare a metalelor la rupere $K_r = \frac{\tau_r}{\sigma_r}$, devenită posibilă și ușor de realizat prin încercările de forfecare

pură și prin acele de întindere, se obține o caracterizare mult mai exactă, cantitativă, a metalelor din acest punct de vedere, dînd valorile $K_r < 1$ pentru rupele plastic-ductile și $K_r > 1$ pentru acele fragil-casante;

4. Cercetările se pot extinde, prin aplicarea metodei noi de încercare la forfecare pură, putînd pune în evidență modificările de structuri survenite în materialele cercetate, în urma diverselor tratamente termice sau a operațiilor de prelucrare a lor ca: laminare, ambutisare etc.;

5. Metoda nouă de încercare la forfecare pură permite o analizare mai exactă a teoriilor de rupere existente; iar prin datele noi care pot fi obținute, poate servi chiar ca bază unor noi teorii, bazate pe considerarea tensiunii tangențiale limită drept stare de tensiuni echivalentă (τ_{ech}), de o determinare mai corectă, care se poate realiza prin noul procedeu de încercare stabilit, chiar decît aceea a tensiunii normale echivalente (σ_{ech});

6. Rezultatele experimentale și aplicative ale încercărilor făcute pînă în prezent permit să se procedeze la o standardizare a acestui procedeu pentru determinarea rezistenței la forfecare pură a metalelor și sudurilor, ca metodologie de încercare, în vederea generalizării și oficializării aplicării acestui procedeu nou în tehnica națională și mondială, în care sens Oficiul de Stat pentru Invenții (O.S.I.) a făcut propunerea necesară.

BIBLIOGRAFIE

1. N. Iosipescu: Cercetări fotoelastice asupra unui procedeu corect de încercare la forfecare pură a materialelor — Studii și Cercetări de Mecanică Aplicată, Anul XIII, nr. 2, 1932, București.
2. N. Iosipescu: Photoelastic Investigations on an Accurate Procedure for the Pure Shear Testing of Materials. *Revue de Mécanique Appliquée*, Tome VIII, nr. 1, 1963, București.
3. N. Iosipescu: Stabilirea și experimentarea unui procedeu nou pentru încercarea oțelurilor la forfecare pură. Studii și Cercetări de Mecanică Aplicată. Anul XIV, nr. 2, 1963, București.
4. N. Iosipescu: Aplicarea unui procedeu nou de încercare la forfecare pură a oțelurilor pentru studiul rezistenței sudurilor în capete. Comunicare la a IV-a Consfătuire de sudură și încercări de metale (Timișoara). Ed. I.D.T., 1962, București.

5. N. Iosipescu: Considerații asupra unei soluții practice a problemei forfecării pure stabilite pe cale fotoelastică. — *Analele Universității București, Seria Științele Naturii, Matematică-Fizică* (39), Anul XII, 1963, București.
6. N. Iosipescu și T. Huidu: Studii fotoelastice asupra repartiției tensiunilor tangențiale la un procedeu nou de încercare la forfecare pură. — *Analele Universității București, Seria Științele Naturii, Matematică-Fizică* (40), Anul XII, 1963, București.
7. *Descrierea invenției nr. 42.082*: Procedeu de încercare statică, epruvetă și dispozitiv de solicitare pentru determinarea rezistenței de solicitare pentru determinarea rezistenței oțelului la forfecare pură — D.G.M.S.I. — O.S.I. — E.S.I.P., 1963, București.
8. N. Iosipescu și I. Iacovachi: Propunere pentru o standardizare pe scară internațională a încercării lemnului la forfecare pură. — *Revista „Standardizarea”* vol. 16, nr. 3, 1964, București.
9. V. Ciufu și I. Iosipescu: Experimentarea unui procedeu nou de încercare a betoanelor. *Revista Construcțiilor și a Materialelor de construcții*. Vol. 15, nr. 9, 1963, București.
10. N. Iosipescu și D. Niculescu: Principii de alcătuire și dispozitive de solicitare pentru un procedeu corect de încercare a metalelor și sudurilor la forfecare pură. — Comunicare prezentată la Sesiunea de Comunicări Științifice a Institut. de Metrologie din 2-4 — iulie 1964.
11. A. Nadai: *Theory of Flow and Fracture of Solids*. — Ed. Mc. Grow Hill, New York, 1950.
12. M. Ros și A. Eichinger: *Die Bruchgefahr fester Körper bei ruhender statischer Beanspruchung*. Bericht Nr. 172 — Eidgenössische Materialprüfungs- und Versuchsanstalt — Zürich, 1949.
3. H. E. Davis, G. E. Troxell și T. Wiskocil: *The Testing and Inspection of Engineering Materials* — Ed. Mc. Graw Hill-Civil Engineering Series — New York 1955.
14. S. D. Ponomariov și alții: *Calculul de rezistență în Construcția de mașini* vol. I. — (Trad. din limba rusă), Ed. Tehnică, București 1960.
15. Joseph Marin: *Mechanical Behaviour of Engineering Materials* — Ed. Prentice — Hall International, London U.S.A., 1962.
16. E. Mörsch: *Der Eisenbetonbau* — vol. I, Ed. K. Wittwer, Stuttgart, 1923.
17. R. V. Vallette: *Eforturi și deformații — Forfecarea și alunecare nu există*. — *Travaux* — Nov. — 1951.

НОВЫЕ МЕТОДЫ ИСПЫТАНИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ПРОВЕРКИ И ДОПОЛНЕНИЯ ТЕОРИИ РАЗРЫВА МАТЕРИАЛОВ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

При помощи нового способа испытания на чистый сдвиг, были проведены различные испытания по разрушению некоторых прокатанных и некоторых отлитых металлов. Таким способом были определены значения сопротивлений разрыву при чистом сдвиге (τ_r) этих металлов, параллельно с их сопротивлением разрыву при растяжении (σ_r).

Установлено, что для прокатанных металлов значение отношения $K_r = \frac{\tau_r}{\sigma_r} < 1$, следовательно $\tau_r < \sigma_r$, а для отлитых металлов значение $K_r = \frac{\tau_r}{\sigma_r} > 1$, откуда следует, что $\tau_r > \sigma_r$.

Эти значения дают представления, характеризующие пластический разрыв прокатанных и хрупкий разрыв отлитых металлов.

**NOUVELLES MÉTHODES D'ESSAI ET RÉSULTATS EXPERIMENTAUX
POUR LA VERIFICATION ET LE COMPLÉMENT DES THEORIES DE RUPTURE
DES MATERIAUX**

R É S U M É

A l'aide d'un nouveau procédé d'essai au cisaillement pur, on a fait différents essais sur la rupture de quelques métaux laminés, ainsi que pour d'autres métaux coulés. On a établi ainsi les valeurs des résistances de rupture au cisaillement pur (τ_r) de ces métaux, parallèlement aux résistances de rupture à la traction (σ_r).

On a constaté que pour les métaux laminés la valeur du rapport $K_r = \frac{\tau_r}{\sigma_r} < 1$, donc $\tau_r < \sigma_r$, tandis que pour les métaux coulés cette valeur est $K_r = \frac{\tau_r}{\sigma_r} > 1$, donc $\tau_r > \sigma_r$.

Ces valeurs caractérisent le genre de rupture plastique — ductile des métaux, laminés et celui friable — cassant des métaux coulés.

ASPECTUL DE EXPRESII ȘI DE FUNCȚII AL FRAȚIILOR CONTINUE *

CONSTANTIN P. POPOVICI

§ 1. Se obișnuiește ca fracțiile continue să fie introduse în modul următor. Se consideră un număr real α . Apoi se ia partea întreagă a lui α , care se notează cu q_0 , adică

$$q_0 = [\alpha].$$

După aceea se ia diferența $\alpha - q_0$ și se notează cu α_1 numărul real $\frac{1}{\alpha - q_0}$ în cazul cînd $\alpha - q_0 \neq 0$. Dacă $\alpha - q_0 = 0$, se consideră procesul terminat. Dacă $\alpha - q_0 \neq 0$, se procedează cu α_1 ca și cu α . Obținem

$$q_1 = [\alpha_1].$$

Acest proces se oprește, dacă există un număr întreg nenegativ n astfel încît

$$\alpha_n - q_n = 0.$$

În caz contrar, procesul se continuă indefinit.

În ambele cazuri, expresia

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}}$$

se numește fracție continuă. În această expresie apar o infinitate de numere întregi $q_0, q_1, q_2, \dots$ sau numai un număr finit de numere întregi și anume numai $q_0, \dots, q_n$, unde n este numărul întreg nenegativ definit mai sus prin $\alpha_n - q_n = 0$. În primul caz fracția continuă se spune că este nelimitată, iar în cele de-al doilea caz se spune că este limitată.

Din cauză că $q_0 = [\alpha]$, rezultă că q_0 este pozitiv, negativ sau nul după cum $\alpha > 1$, $\alpha < 0$ sau $0 < \alpha < 1$. Avem $\alpha - q_0 = \{\alpha\}$, unde $\{\alpha\}$ este partea fracționară a lui α , adică $0 \leq \{\alpha\} < 1$. Dacă $\alpha - q_0 \neq 0$,

* Lucrare comunicată la Sesiunea științifică jubiliară a Universității din București din 15 - 17 octombrie 1964

rezultă că $\alpha_1 = \frac{1}{\{\alpha\}} > 1$, deci q_1 este un număr natural. Tot astfel se vede și că $q_2, \dots$ sînt numere naturale, în cazul cînd $q_2, \dots$ există.

În modul indicat mai sus, fiecărui număr real i se asociază o fracție continuă, considerată ca expresie.

După ce se face acest lucru, fiecărei fracții continue

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}}$$

i se asociază o mulțime de numere raționale R_i definite în felul următor :

$$R_i = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots \frac{1}{q_i}}}$$

unde $i \geq 0$ dacă în fracția continuă considerată există o infinitate de numere întregi $q_0, q_1, q_2, \dots$, sau $0 \leq i \leq n$ dacă în fracția continuă considerată există numai numerele întregi $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$.

Numărul rațional R_i se numește redusa de rangul i a fracției continue considerate.

Se constată că redusele le putem scrie sub forma

$$R_i = \frac{P_i}{Q_i},$$

unde P_i și Q_i sînt numere întregi, definite prin recurență după cum urmează

$$P_i = P_{i-1} q_i + P_{i-2},$$

$$Q_i = Q_{i-1} q_i + Q_{i-2},$$

unde $i \geq 0$ sau numai $0 \leq i \leq n$, iar $P_{-2} = 0$, $P_{-1} = 1$, $Q_{-2} = 1$, $Q_{-1} = 0$ ¹.

De asemenea, se constată că dacă $q_1, q_2, \dots$ formează un șir infinit de numere naturale, atunci

$$\lim_{i \rightarrow \infty} R_i$$

este un număr real². Să notăm

$$\beta = \lim_{i \rightarrow \infty} R_i.$$

¹ Vezi Gabriel Sudan: Geometrizarea fracțiilor continue, Editura tehnică, București-1959, pp. 17 - 18.

² *Ibid.*, loc cit., pp. 22 - 23.

Se vede, deci, că fiecărei fracții continue i se asociază un număr real. Acest număr real este R_n dacă în fracția continuă considerată avem numai un număr finit de numere întregi, anume $q_0, q_1, \dots, q_n$, unde $q_1, \dots, q_n$ sînt numere naturale. Dacă însă în fracția continuă considerată avem o infinitate de numere întregi $q_0, q_1, q_2, \dots$, unde $q_1, q_2, \dots$ sînt numere naturale, atunci β este numărul real care i se asociază fracției continue considerate.

Se constată că $\alpha = R_n$ sau $\alpha = \beta$ după cum fracția continuă este limitată sau nelimitată³.

În acest mod, pe mulțimea fracțiilor continue este definită o funcție cu domeniul format din șiruri finite sau nu de numere întregi $q_0, q_1, q_2, \dots$, unde $q_1, q_2, \dots$ sînt numere naturale. În cazul șirurilor finite $q_0, q_1, \dots, q_n$, în care n este număr natural, avem $q_n \neq 1$, deoarece $q_n = \alpha_n$, iar $\alpha_n = \frac{1}{\{\alpha_{n-1}\}} > 1$ considerînd că $\alpha_0 = \alpha$. Codomeniul funcției considerate este mulțimea numerelor reale.

Se degajă deci două aspecte ale noțiunii de fracție continuă, anume aspectul de expresie și aspectul de funcție.

§ 2. O fracție continuă considerată ca expresie trebuie să fie definită în felul următor⁴.

Definiție. O fracție continuă este o expresie de forma

$$[q_0, q_1, q_2, \dots],$$

unde $q_0, q_1, q_2, \dots$ sînt elementele unui inel I , șirul $q_0, q_1, q_2, \dots$ fiind finit sau nu.

Vom spune că o fracție continuă este limitată dacă șirul $q_0, q_1, q_2, \dots$ este finit și nelimitată dacă șirul $q_0, q_1, q_2, \dots$ este infinit.

Dacă inelul I este comutativ și are element neutru la înmulțire, notat cu 1, fracției continue astfel definite, îi vom asocia următoarele două șiruri

$$\begin{aligned} P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, \dots, \\ Q_{-2}, Q_{-1}, Q_0, Q_1, \dots \end{aligned}$$

definite prin recurență după cum urmează

$$P_{-2} = 0, P_{-1} = 1, P_i = P_{i-1} q_i + P_{i-2} \quad (i \geq 0 \text{ sau numai } 0 \leq i \leq n),$$

$$Q_{-2} = 1, Q_{-1} = 0, Q_i = Q_{i-1} q_i + Q_{i-2} \quad (i \geq 0 \text{ sau numai } 0 \leq i \leq n).$$

Aceste două șiruri le vom combina într-un singur șir

$$R_{-2}, R_{-1}, R_0, R_1, \dots,$$

denumit șirul reduselor fracției continue considerate, punînd simbolic

$$R_j = \frac{P_j}{Q_j} \quad (j \geq -2 \text{ sau numai } -2 \leq j \leq n).$$

³ Ibid., loc cit., pp. 13 – 14.

⁴ Vezi Constantin P. Popovici: Aritmetica și teoria numerelor, Editura didactică și pedagogică, București – 1963, pp. 137–140.

Dacă Q_i este diferit de divizorii lui zero ai inelului I , atunci R_i poate fi considerat ca fiind un element al inelului cîturilor inelului I .

Studiul unei fracții continue considerată ca expresie se reduce la studiul șirurilor

$$P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, \dots,$$

$$Q_{-2}, Q_{-1}, Q_0, Q_1, \dots$$

Acest studiu poate fi făcut utilizînd și șirul

$$R_{-2}, R_{-1}, R_0, R_1, \dots,$$

dar aceasta numai în cazul cînd elementele ultimului șir sînt elemente ale inelului cîturilor inelului I .

Ca exemplificare de felul cum trebuie studiate proprietățile fracțiilor continue considerate ca expresii, vom da demonstrația următoarei teoreme ⁵.

Teoremă. Pentru fracția continuă

$$[q_0, q_1, \dots, q_n, q_{n+1}, \dots, q_{2n+1}],$$

unde $q_{n+i} = q_{n-i+1}$ ($i = 1, \dots, n$), avem

$$P_{2n+1} = P_n^2 + P_{n-1}^2,$$

$$Q_{2n} = Q_n^2 + Q_{n-1}^2.$$

Demonstrație. Dacă $s = 0, \dots, n$, atunci, în cazul fracției continue considerate, avem

$$P_{n-s} P_{n+s} + P_{n+s-1} P_{n-s-1} = P_{n-(s+1)} P_{n+(s+1)} + P_{n+(s+1)-1} P_{n-(s+1)-1}.$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} P_{n-s} P_{n+s} + P_{n+s-1} P_{n-s-1} &= (P_{n-s-1} q_{n-s} + P_{n-s-2}) P_{n+s} + P_{n+s-1} P_{n-s-1} = \\ &= P_{n-s-1} (P_{n+s} q_{n-s} + P_{n+s-1}) + P_{n+s} P_{n-s-2} = P_{n-s-1} (P_{n+s} q_{n+s+1} + P_{n+s-1}) + \\ &+ P_{n+s} P_{n-s-2} = P_{n-s-1} P_{n+s+1} + P_{n+s} P_{n-s-2} = P_{n-(s+1)} P_{n+(s+1)} + \\ &+ P_{n+(s+1)-1} P_{n-(s+1)-1}. \end{aligned}$$

Deci

$$P_n P_n + P_{n-1} P_{n-1} = P_{n-1} P_{n+1} + P_n P_{n-2} = \dots = P_{-1} P_{2n+1} + P_{2n} P_{-2},$$

de unde rezultă că

$$P_{2n+1} = P_n^2 + P_{n-1}^2.$$

De asemenea, în cazul fracției continue considerate, avem

$$Q_{n-s} Q_{n+s} + Q_{n+s-1} Q_{n-s-1} = Q_{n-(s+1)} Q_{n+(s+1)} + Q_{n+(s+1)-1} Q_{n-(s+1)-1},$$

⁵ Vezi Gabriel Sudan: Geometrizarea fracțiilor continue, Editura tehnică, București - 1959, p. 30 - 32.

dacă $s = 0, \dots, n$. Demonstrația se face la fel și obținem

$$Q_n Q_n + Q_{n-1} Q_{n-1} = Q_{n-1} Q_{n+1} + Q_n Q_{n-2} = \dots = Q_{-1} Q_{2n+1} + Q_{2n} Q_{-2},$$

de unde rezultă că

$$Q_{2n} = Q_n^2 + Q_{n-1}^2.$$

Considerăm că această demonstrație e mult mai simplă decât demonstrația care se dă utilizînd șirul reduselor⁵.

§ 3. Pe mulțimea fracțiilor continue definim o funcție dacă fiecărui șir $q_0, q_1, q_2, \dots$, finit sau nu, de elemente ale unui inel I îi atribuim o valoare dintr-o mulțime de elemente M .

În cazul cînd $q_0, q_1, q_2, \dots$ formează un șir de numere întregi, limitat sau nu, unde $q_1, q_2, \dots$ sînt numere naturale, un mod de a defini o funcție pe mulțimea fracțiilor continue este următorul:

Definiție. Valoarea fracției continue limitate

$$[q_0, q_1, q_2, \dots, q_n]$$

este redusă R_n , iar valoarea fracției continue nelimitate

$$[q_0, q_1, q_2, \dots]$$

este $\lim_{i \rightarrow \infty} R_i$.

Observație. Această definiție are sens, deoarece se știe că dacă $q_1, q_2, \dots$ sînt numere naturale, atunci R_i , unde $i \geq 0$, sînt numere raționale, iar șirul $R_0, R_1, R_2, \dots$ este convergent⁶.

În definiția de mai sus am stabilit o funcție al cărei domeniu este mulțimea șirurilor finite sau infinite de numere întregi $q_0, q_1, q_2, \dots$, unde $q_1, q_2, \dots$ sînt numere naturale, iar codomeniul este mulțimea numerelor reale. Vom arăta că:

Teoremă. Funcția definită mai sus este biunivocă, dacă din domeniul acestei funcții nu fac parte șirurile finite $q_0, q_1, \dots, q_n$, unde $n \geq 1$ și $q_n = 1$.

Demonstrație. În definiția de mai sus, fiecărui șir de numere întregi $q_0, q_1, q_2, \dots$ limitat sau nu, unde $q_1, q_2, \dots$ sînt numere naturale, îi corespunde un număr real și numai unul singur.

Reciproc, să arătăm că orice număr real este valoarea unei fracții continue și numai a unei singure în sensul definiției de mai sus, dacă nu se consideră fracțiile continue de forma $[q_0, q_1, \dots, q_n]$, unde $n \geq 1$ și $q_n = 1$.

Că fiecare număr real este valoarea unei fracții continue în sensul definiției de mai sus, reiese din cele spuse în § 1.

Rămîne să mai arătăm că fiecare număr real este valoarea unei singure fracții continue în sensul definiției de mai sus. Pentru aceasta fie

$$[q_0, q_1, q_2, \dots]$$

o fracție continuă limitată sau nu, unde q_0 este un număr întreg, iar $q_1, q_2, \dots$ sînt numere naturale. Luînd $\alpha = R_n$ în cazul fracției continue limitate și de forma

$$[q_0, q_1, q_2, \dots, q_n],$$

⁶ Ibid., loc. cit., pp. 22–23.

unde $q_n \neq 1$, dacă $n \geq 1$ și luînd $\alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} R_i$ în cazul fracției continue nelimitate, este suficient să arătăm că fracția continuă considerată se deduce din α prin procedeul indicat în § 1.

Subliniem faptul că fracția continuă considerată este dată numai prin indicarea șirului de numere întregi $q_0, q_1, q_2, \dots$.

Deoarece

$$R_{2k} - R_{2k+1} = \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} - \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} = \frac{P_{2k} Q_{2k+1} - P_{2k+1} Q_{2k}}{Q_{2k} Q_{2k+1}} = \frac{(-1)^{2k+1}}{Q_{2k} Q_{2k+1}} < 0$$

rezultă că

$$R_{2k} < R_{2k+1}$$

dacă $k \geq 0$, numerele Q_i fiind pozitive pentru $i \geq 6$, ceea ce rezultă din relațiile de recurență cu care ele sînt definite.

Avem și

$$\begin{aligned} R_{2k+2} - R_{2k} &= \frac{P_{2k+2}}{Q_{2k+2}} - \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} = \frac{P_{2k+1} q_{2k+2} + P_{2k}}{Q_{2k+1} q_{2k+2} + Q_{2k}} - \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} = \\ &= \frac{(P_{2k+1} Q_{2k} - P_{2k} Q_{2k+1}) q_{2k+2}}{Q_{2k+2} Q_{2k}} = \frac{(-1)^{2k} q_{2k+2}}{Q_{2k+2} Q_{2k}} > 0. \end{aligned}$$

Deci

$$R_{2k} < R_{2k+2}$$

dacă $k \geq 0$.

Apoi.

$$\begin{aligned} R_{2k+1} - R_{2k+3} &= \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} - \frac{P_{2k+3}}{Q_{2k+3}} = \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} - \frac{P_{2k+2} q_{2k+3} + P_{2k+1}}{Q_{2k+2} q_{2k+3} + Q_{2k+1}} = \\ &= \frac{(P_{2k+1} Q_{2k+2} - P_{2k+2} Q_{2k+1}) q_{2k+3}}{Q_{2k+3} Q_{2k+1}} = \frac{(-1)^{2k+2} q_{2k+3}}{Q_{2k+3} Q_{2k+1}} > 0. \end{aligned}$$

Deci

$$R_{2k+1} < R_{2k+3}$$

dacă $k \geq 0$.

Rezultă că

$$R_{2s} < R_{2t+1}$$

oricare ar fi valorile lui s și t cu condiția ca $s \geq 0, t \geq 0$. Acest lucru se stabilește astfel. Dacă $s = t$, punînd $s = t = k$ regăsim una din relațiile de mai sus. Dacă $s < t$, atunci

$$R_{2s} < R_{2(s+1)} < \dots < R_{2t} < R_{2t+1},$$

iar dacă $s > t$, atunci

$$R_{2s} < R_{2s+1} < \dots < R_{2(t+1)+1} < R_{2t+1}.$$

Deci dacă fracția continuă este limitată și egală cu R_n , atunci toate redusele R_i de indice par i pentru care $0 \leq i < n$ sînt mai mici ca R_n și

toate redusele R_i de indice impar i pentru care $0 \leq i < n$ sînt mai mari ca R_n . Deci dacă $0 \leq i < n$ avem $R_n \neq R_i$.

Dacă fracția continuă este nelimitată, atunci toate redusele R_i de indice par pentru care $i \geq 0$ sînt mai mici ca $\alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} R_i$, iar toate redusele R_i de indice impar i pentru care $i \geq 0$ sînt mai mari ca $\alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} R_i$ și deci $\alpha \neq R_i$ pentru orice i pentru care $i \geq 0$.

Într-adevăr, dacă ar exista un indice $2i_0 \geq 0$ cu

$$\alpha \leq R_{2i_0}$$

atunci punînd $\varepsilon = R_{2i_0} - \alpha$ am avea

$$|\alpha - R_{2i}| > \varepsilon$$

pentru orice $i > i_0$ și n-am mai avea $\alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} R_i$, deoarece $\alpha \neq \lim_{i \rightarrow \infty} R_{2i}$.

Tot astfel, dacă ar exista un indice $2i_0 + 1 \geq 0$ cu

$$R_{2i_0+1} \leq \alpha$$

atunci punînd $\varepsilon = \alpha - R_{2i_0+1}$, am avea

$$|\alpha - R_{2i+1}| > \varepsilon$$

pentru orice $i > i_0$ și n-am mai avea $\alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} R_i$, deoarece $\alpha \neq \lim_{i \rightarrow \infty} R_{2i+1}$.

Să arătăm acum că pentru $i \geq 0$ putem determina un număr real notat cu α_{i+1} , care este pozitiv, astfel încît să avem

$$\alpha = \frac{P_i \alpha_{i+1} + P_{i-1}}{Q_i \alpha_{i+1} + Q_{i-1}}$$

dacă redusa R_i există și $\alpha \neq R_i$.

Într-adevăr, dacă redusa R_i există pentru $i \geq 0$, atunci există și $P_i, Q_i, P_{i-1}, Q_{i-1}$ conform relațiilor de recurență cu care definim aceste numere. Apoi relația

$$\alpha = \frac{P_i \alpha_{i+1} + P_{i-1}}{Q_i \alpha_{i+1} + Q_{i-1}}$$

este echivalentă cu

$$\alpha_{i+1} = \frac{P_{i-1} - \alpha Q_{i-1}}{\alpha Q_i - P_i}$$

cu condiția ca $\alpha \neq R_i$. În cazul fracțiilor continue nelimitate, am arătat că redusa R_i există pentru orice $i \geq 0$ și avem $\alpha \neq R_i$ pentru $i \geq 0$. În cazul fracției continue limitate $[q_0, q_1, \dots, q_n]$, redusa R_i există pentru orice i pentru care $0 \leq i \leq n$, dar avem $\alpha \neq R_i$ numai pentru $i < n$.

Dacă $n = 0$, reținem că $\alpha = R_0 = q_0$, deci

$$q_0 = [\alpha],$$

ceea ce trebuia de demonstrat și considerăm, mai departe, numai cazul cînd $n \geq 1$.

Dacă $n \geq 1$ și $i \geq 0$ avem

$$\alpha_{i+1} > 0$$

ori de cîte ori $\alpha \neq R_i$, deoarece $P_{i-1} - \alpha Q_{i-1}$ și $\alpha Q_i - P_i$ sînt de același semn, după cum rezultă din

$$\frac{P_i}{Q_i} < \alpha < \frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}$$

dacă i este par și $i \geq 1$ și din

$$\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}} < \alpha < \frac{P_i}{Q_i}$$

dacă i este impar și $i \geq 1$. Pentru $i = 0$ ajungem la aceeași concluzie, deoarece $P_{-1} - \alpha Q_{-1} = 1 > 0$ și $\frac{P_0}{Q_0} < \alpha$, adică $\alpha Q_0 - P_0 > 0$.

Să facem acum diferența

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}} - \alpha.$$

Obținem

$$\begin{aligned} \frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}} - \alpha &= \frac{P_i q_{i+1} + P_{i-1}}{Q_i q_{i+1} + Q_{i-1}} - \frac{P_i \alpha_{i+1} + P_{i-1}}{Q_i \alpha_{i+1} + Q_{i-1}} = \\ &= \frac{(P_{i-1} Q_i - P_i Q_{i-1}) \alpha_{i+1} + (P_i Q_{i-1} - P_{i-1} Q_i) q_{i+1}}{Q_{i+1} (Q_i \alpha_{i+1} + Q_{i-1})} = \frac{(-1)^i (\alpha_{i+1} - q_{i+1})}{Q_{i+1} (Q_i \alpha_{i+1} + Q_{i-1})}. \end{aligned}$$

Dacă i este par avem

$$0 \leq \frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}} - \alpha = \frac{\alpha_{i+1} - q_{i+1}}{Q_{i+1} (Q_i \alpha_{i+1} + Q_{i-1})},$$

iar dacă i este impar avem

$$0 \geq \frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}} - \alpha = \frac{-(\alpha_{i+1} - q_{i+1})}{Q_{i+1} (Q_i \alpha_{i+1} + Q_{i-1})}.$$

Semnul egal are loc, însă, numai în cazul fracțiilor continue limitate de forma

$$[q_0, q_1, \dots, q_n]$$

și $i = n-1$. Deci în cazul fracțiilor continue nelimitate avem

$$q_{i+1} < \alpha_{i+1}$$

pentru orice i pentru care $i \geq 0$, iar în cazul fracțiilor continue limitate de forma de mai sus, avem

$$q_{i+1} < \alpha_{i+1} \quad (0 \leq i \leq n-2), \quad q_n = \alpha_n.$$

Din

$$\alpha = \frac{P_i \alpha_{i+1} + P_{i-1}}{Q_i \alpha_{i+1} + Q_{i-1}}$$

deducem

$$\alpha = \frac{(P_{i-1} q_i + P_{i-2}) \alpha_{i+1} + P_{i-1}}{(Q_{i-1} q_i + Q_{i-2}) \alpha_{i+1} + Q_{i-1}} = \frac{P_{i-1} \left(q_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}} \right) + P_{i-2}}{Q_{i-1} \left(q_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}} \right) + Q_{i-2}}.$$

deci

$$\alpha_i = q_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}},$$

pentru că

$$q_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}} = \frac{P_{i-2} - \alpha Q_{i-2}}{\alpha Q_{i-1} - P_{i-1}} = \alpha_i.$$

Însă

$$\alpha_{i+1} > q_{i+1} \geq 1$$

pentru orice $i \geq 0$ sau numai pentru i pentru care $0 \leq i \leq n-2$, în cazul cînd $i = n-1$ avînd

$$\alpha_n = q_n > 1,$$

dacă $n \geq 1$ și $q_n \neq 1$, ceea ce am presupus că are loc. Deci

$$0 \leq \frac{1}{\alpha_{i+1}} < 1,$$

deci

$$q_i = [\alpha_i]$$

pentru orice $i \geq 0$ sau numai pentru i pentru care $0 \leq i \leq n$, pentru $i = n$ acest lucru rezultînd din $q_n = \alpha_n$.

Observație. În [1]⁷, teorema pe care am demonstrat-o este enunțată astfel:

Dacă două fracții continue regulate au aceeași valoare, atunci ele sînt identice, adică numitorii incompleți ai uneia sînt identici cu numitorii incompleți ai celeilalte.

Adăugăm că prin numitorii incompleți ai fracției continue

$$[q_0, q_1, q_2, \dots]$$

se înțeleg numerele întregi $q_0, q_1, q_2, \dots$.

⁷ Vezi pag. 24.

Demonstrația este dată pornind de la observația că partea întreagă și partea fracționară a unui număr real sînt unice.

Nu acesta este însă sensul teoremei de mai sus. Aceeași eroare se face și în [3]⁸. În schimb în [2]⁹ se spune că teorema de mai sus este evidentă. Și acest punct de vedere este departe de realitate după cum rezultă din demonstrațiile date în [4]¹⁰ și în lucrarea de față.

BIBLIOGRAFIE

1. Gabriel Sudan: Geometrizarea fracțiilor continue, Editura tehnică, București—1959.
2. A. Denjoy: Sur les systèmes complets de fractions, Bull. Soc. Math. France, vol. 39, 1911.
3. N. N. Vorobiev: Numerele lui Fibonacci, Biblioteca Societății de științe matematice și fizice din R.P.R., 1953.
4. А. Я. Хинчин: Элементы теории чисел, Энциклопедия элементарной математики, I, Арифметика, Москва-Ленинград — 1951.
5. Constantin P. Popovici: Aritmetica și teoria numerelor, Editura didactică și pedagogică, București — 1963.

РАССМОТРЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ КАК ВЫРАЖЕНИЙ И КАК ФУНКЦИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В этой статье непрерывные дроби рассматриваются как выражения и как функции.

Как выражение, понятие непрерывной дроби обобщается во всяком коммутативном кольце с единицей для умножения.

L'ASPECT D'EXPRESSION ET DE FONCTION DES FRACTIONS CONTINUES

R É S U M É

Dans ce travail on met en évidence les deux aspects des fractions continues, l'aspect d'expression et l'aspect de fonction.

Comme expression, la notion de fraction continue se généralise dans chaque anneau commutatif avec l'unité pour la multiplication.

⁸ Vezi pag. 37.

⁹ Vezi pp. 186—187.

¹⁰ Vezi pp. 318—319.

DESPRE REPREZENTAREA COMPLEXĂ A SOLUȚIEI ELASTODINAMICII PLANE

NICOLAE ȘANDRU

1. Este cunoscută calea inițială de rezolvare a problemei elastodinamicii plane prin introducerea funcțiilor de variabilă complexă cu utilizarea analogului dinamic al funcției lui Airy [1].

Faptul că această funcție dispăre din toate raționamentele ulterioare, precum și aspectul greoi al relațiilor ce trebuie folosite, face însă de dorit ca aceste formule să poată fi deduse direct din ecuațiile problemei plane. De asemenea integrarea ecuațiilor în deplasări, așa cum s-a făcut în [2] nu reprezintă calea cea mai directă de studiu a ecuațiilor problemei plane.

În cele de față vom prezenta modul în care aceste formule pot fi stabilite cu utilizarea ecuațiilor în tensiuni, făcând uz sistematic de reprezentarea complexă a tuturor mărimilor cu care operăm. Acest calcul păstrează o deplină analogie cu modul de introducere a funcțiilor lui Kolosov — Mushelișvili din problema elastostaticii plane dată în lucrarea [3].

Amintim aici ecuațiile de mișcare (în absența forțelor de volum)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

ecuațiile de compatibilitate [4]

$$\square_2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} \delta_{ij} = 0, \quad (1.2)$$

ecuațiile fizice

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{E} [\sigma_{ii} - \nu (\sigma_{jj} + \sigma_{kk})] \quad (!) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}, \quad (1.3)$$

ecuațiile geometrice

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.4)$$

Cele două viteze de propagare a undelor sînt

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\eta}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (1.5)$$

Pentru a fixa ideile vom examina starea de deformare plană, caracterizată de relațiile

$$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_{33} = 0. \quad (1.6)$$

Funcțiile ce apar în (1.1) – (1.4) sînt în acest caz funcții numai de variabilele x , y și t .

Din (1.3) și (1.6) urmează că

$$\sigma_{33} = \nu S_0 \quad (1.7)$$

unde am notat

$$S_0 = \sigma_{11} + \sigma_{22}. \quad (1.8)$$

astfel că invariantul linear al tensiunii se scrie

$$\Theta = (1 + \nu) S_0. \quad (1.9)$$

Cu aceasta ecuațiile (1.1) devin

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (1.10)$$

iar ecuațiile de compatibilitate iau forma

$$\begin{aligned} \square_2 \sigma_{11} + \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2} + \frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu} \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 S_0}{\partial t^2} &= 0, \\ \square_2 \sigma_{22} + \frac{\partial^2 S_0}{\partial y^2} + \frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu} \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 S_0}{\partial t^2} &= 0, \\ \square_2 \sigma_{12} + \frac{\partial^2 S_0}{\partial x \partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Legea lui Hooke (1.3) se reduce la

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22} - \nu^2 S_0) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11} - \nu^2 S_0) \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

iar ecuațiile geometrice (1.4) devin

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (1.13)$$

2. Vom face uz sistematic de variabilele complexe

$$z_1 = \xi + s_1 \eta, \quad z_2 = \xi + s_2 \eta \quad (2.1)$$

și conjugatele lor

$$\bar{z}_1 = \xi - s_1 \eta, \quad \bar{z}_2 = \xi - s_2 \eta$$

unde

$$\xi = x - ct, \quad \eta = y$$

iar

$$s_1 = i\beta_1 = i \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2} \right)^{1/2}, \quad s_2 = i\beta_2 = i \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2} \right)^{1/2}.$$

Avem evident

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{s_1} \frac{\partial}{\partial \eta} \right), & \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{s_1} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z_2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{s_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \right), & \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{s_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

De asemenea vom avea

$$\square_1 = 4\beta_1^3 \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1}, \quad \square_2 = 4\beta_2^3 \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2}. \quad (2.3)$$

Adunînd primele două ecuații (1.11) obținem

$$\square_1 S_0 = 0 \quad \text{adică} \quad \frac{\partial^2 S_0}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} = 0. \quad (2.4)$$

Mai departe, înmulțim prima ecuație (1.11) cu -1, pe cea de-a treia cu 2i și adunînd cele trei ecuații, obținem

$$\square_2 S - 4 \frac{\partial^2 S_0}{\partial z^2} = 0 \quad (2.5)$$

unde $z = x + iy$ iar

$$S = \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}. \quad (2.6)$$

Acest raționament nu necesită — după cum se vede — stabilirea separată a condițiilor de compatibilitate pentru cazul plan.

Din (1.8) și (2.6) avem

$$\sigma_{11} = \frac{S_0}{2} - \frac{S + \bar{S}}{4}, \quad \sigma_{22} = \frac{S_0}{2} + \frac{S + \bar{S}}{4}, \quad \sigma_{12} = -i \frac{S - \bar{S}}{4} \quad (2.7)$$

Vom introduce și deplasarea complexă

$$U = u + i v. \quad (2.8)$$

Mai departe, introducând relațiile (1.12) în (1.13) și ținând seama de (2.7), de definiția (2.8), obținem ecuațiile fizico-geometrice ale problemei sub forma complexă

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{4\nu} \bar{S}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}} = \frac{1-2\nu}{2\mu} S_0. \quad (2.9)$$

3. Sistemul ecuațiilor (2.4), (2.5), (2.9) se integrează cu ușurință. Astfel ecuația omogenă (2.4) integrată în raport cu $\bar{z}_1$ și apoi în raport cu z_1 (ținând seama că S_0 e real) ne dă

$$S_0 = 2 [\Phi_1(z_1) + \overline{\Phi_1(z_1)}] \quad (3.1)$$

Introducând (3.1) în ecuația (2.5) obținem

$$\square_2 S = 2 [(1 + \beta_1)^2 (\Phi_1' + \overline{\Phi_1'}) + 2 \beta_1 (\Phi_1'' - \overline{\Phi_1''})], \quad (3.2)$$

deoarece

$$\frac{\partial \Phi_1(z_1)}{\partial z} = \frac{1 + \beta_1}{2} \Phi_1'(z_1), \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \overline{\Phi_1(z_1)}}{\partial z} = \frac{1 - \beta_1}{2} \overline{\Phi_1'(z_1)}.$$

Având în vedere că

$$\square_2 \Phi_1(z_1) = -(\beta_1^2 - \beta_2^2) \Phi_1''(z_1)$$

soluția ecuației (3.2) se va putea scrie

$$S = 2 \left[-\frac{(1 + \beta_1)^2}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \Phi_1(z_1) - \frac{(1 - \beta_1)^2}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \overline{\Phi_1(z_1)} + \Phi_2(z_2) + \overline{\Phi_3(z_2)} \right] \quad (3.4)$$

Funcțiile Φ_1 , Φ_2 , și Φ_3 astfel introduse sînt funcții arbitrare de z_1 respectiv z_2 . Întrucît S , S_0 sînt funcții uniforme de clasă C^1 , funcțiile Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 rezultă a fi funcții analitice în domeniul D ocupat de corpul elastic.

Considerînd încă și primitivele lor definite prin

$$\varphi_1'(z_1) = \Phi_1(z_1), \quad \varphi_2'(z_2) = \Phi_2(z_2), \quad \varphi_3'(z_2) = \Phi_3(z_2), \quad (3.5)$$

obținem relațiile

$$S_0 = 2 [\varphi_1'(z_1) + \overline{\varphi_1'(z_1)}], \quad (3.6)$$

$$S = 2 \left[-\frac{(1 + \beta_1)^2}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \varphi_1'(z_1) - \frac{(1 - \beta_1)^2}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \overline{\varphi_1'(z_1)} + \varphi_2'(z_2) + \overline{\varphi_3'(z_2)} \right]$$

Mai departe, introducînd (3.6) în (2.9) obținem sistemul

$$2\mu \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = \frac{(1 - \beta_1)^2}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \varphi_1' + \frac{(1 + \beta_1)^2}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \bar{\varphi}_1' - \bar{\varphi}_2' - \varphi_3$$

de unde integrînd în raport cu $\bar{z}$ prima ecuație, obținem

$$\mu U = \frac{1 - \beta_1}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \varphi_1 + \frac{1 + \beta_1}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \bar{\varphi}_1 - \frac{1}{1 + \beta_2} \bar{\varphi}_2 - \frac{1}{1 - \beta_2} \varphi_3 - U_1 \quad (3.7)$$

U_1 fiind o funcție cu proprietatea evidentă

$$\frac{\partial U_1}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (3.8)$$

Mai avem din (2.9)

$$\mu \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{1 - \beta_1^2}{\beta_1^2 - \beta_2^2} (\varphi_1' + \bar{\varphi}_1') \quad (3.9)$$

deoarece

$$\nu = - \frac{1 - 2\beta_1^2 + \beta_2^2}{2(\beta_1^2 - \beta_2^2)}.$$

Dar din (3.7) avem

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}} \right) &= \frac{1 - \beta_1^2}{\beta_1^2 - \beta_2^2} (\varphi_1' + \bar{\varphi}_1') - \frac{1 - \beta_2}{2(\beta_1 + \beta_2)} (\varphi_2' + \bar{\varphi}_2') - \\ &- \frac{1 + \beta_2}{2(1 - \beta_2)} (\varphi_3' + \bar{\varphi}_3') + \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{z}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Comparînd (3.9) cu (3.10) rezultă

$$\frac{\partial U_1}{\partial z} + \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{z}} = \frac{1 - \beta_2}{2(1 + \beta_2)} (\varphi_2' + \bar{\varphi}_1') + \frac{1 + \beta_2}{2(1 - \beta_2)} (\varphi_3' + \bar{\varphi}_3') \quad (3.11)$$

De unde, prin integrare, obținem

$$U_1 = \frac{1 - \beta_2}{2(1 + \beta_2)} \varphi_2 + \frac{1 + \beta_2}{2(1 - \beta_2)} \varphi_3 \quad (3.12)$$

Condiția (3.8) va fi satisfăcută dacă punem

$$\varphi_3(z_2) = - \frac{(1 - \beta_2)^2}{(1 + \beta_2)^2} \varphi_2(z_2) \quad (3.13)$$

De aici se vede că soluția problemei depline, ca și în cazul static, doar de două funcțiuni $\varphi_1(z_1)$ și $\varphi_2(z_2)$.

În definitiv soluția problemei se scrie astfel

$$S_0 = 2 [\varphi'_1(z_1) + \overline{\varphi'_1(z_1)}] \quad (3.14)$$

$$S = 2 \left[-\frac{1 + \beta_1^2}{\beta_1^2 - \beta_2^2} (\varphi'_1 + \overline{\varphi'_1}) - \frac{2\beta_1}{\beta_1^2 - \beta_2^2} (\varphi'_1 - \overline{\varphi'_1}) + \right. \quad (3.15)$$

$$\left. + \frac{2\beta_2}{(1 + \beta_2)^2} (\varphi'_2 + \overline{\varphi'_2}) + \frac{1 + \beta_2^2}{(1 + \beta_2)^2} (\varphi'_2 - \overline{\varphi'_2}) \right],$$

$$\mu U = \frac{1}{\beta_1^2 - \beta_2^2} (\varphi_1 + \overline{\varphi_1}) - \frac{\beta_1}{\beta_1^2 - \beta_2^2} (\varphi_1 - \overline{\varphi_1}) - \quad (3.16)$$

$$- \frac{\beta_2}{(1 + \beta_2)^2} (\varphi_2 + \overline{\varphi_2}) + \frac{1}{(1 + \beta_2)^2} (\varphi_2 - \overline{\varphi_2}).$$

Rezultatele astfel obținute se pot pune cu ușurință, în legătură cu cele stabilite în lucrările [1] și [2].

BIBLIOGRAFIE

1. J. R. M. Radok: On the Solution of Problems of Dynamic Plane Elasticity, Q.A.M. vol. XIV, nr. 3, 1956.
2. J. N. Sneddon: The stress produced by a pulse of pressure moving along the surface of a semi-infinite solid, Rend. Circ. Mat. Palermo, 1, 1952.
3. L. Solomon: Despre stabilirea formulelor lui Kolosov - Mushelişvili, Analele Univ. Buc. nr. 40, 1963.
4. P. P. Teodorescu: Asupra problemei spațiale a elastodinamicii, St. și cercet. de mec. aplic., 3, 1960.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ ПОМОЩИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе даётся представление напряжённого состояния через две функции комплексных переменных z_1 и z_2 .

Исходя из прямого интегрирования уравнений в напряжениях, получено представление решения аналогичное решению, полученному в работах [1] и [2].

**SUR LA REPRÉSENTATION PAR FONCTIONS COMPLEXES DE LA SOLUTION DE
L'ÉLASTODYNAMIQUE PLANE**

R É S U M É

L'ouvrage donne une représentation de l'état de tension par l'intermédiaire de deux fonctions des variables complexes z_1 et z_2 .

En prenant comme point de départ l'intégration directe des équations en tensions, on obtient une représentation de la solution, analogue aux représentations données par Rodok et Sneddon [1], [2].

THE UNIVERSITY OF CHICAGO LIBRARY

AND THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

CHICAGO, ILL. 60607

O METODĂ MONTE-CARLO APLICATĂ LANȚURILOR CU LEGĂTURI COMPLETE

R. THEODORESCU

În această notă se descrie modelarea directă a lanțurilor cu legături complete cu ajutorul numerelor aleatoare și o metodă Monte-Carlo de calcul a probabilităților limită în cazul ergodic.

1. Să considerăm un câmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ și $(\xi_n)_{n \in N^*}^1$ un șir de variabile aleatoare definite pe acest câmp care pot lua fiecare un număr finit de valori $S_1, \dots, S_{m+1}$ ($m \geq 1$). Să notăm cu

$$p_{i_1 \dots i_n, j} = P(\xi_{n+1}(\omega) = S_j \mid \xi_n(\omega) = S_{i_n}, \dots, \xi_1(\omega) = S_{i_1})$$

$1 \leq i_1, \dots, i_n, j \leq m+1$, probabilitatea ca variabila aleatoare ξ_{n+1} să se găsească în starea S_j , după ce în prealabil variabilele aleatoare precedente au trecut respectiv prin stările $S_{i_1}, \dots, S_{i_n}$ adică au parcurs traiectoria $S_{i_1} \dots S_{i_n}^2$. De asemenea, fie $\varphi_{i,j}^{(n)}$, $1 \leq i, j \leq m+1$, $n \in N^*$, un sistem de funcții care aplică simplexul

$$\Delta = \left\{ (x_1, \dots, x_{m+1}) : 0 \leq x_i \leq 1, 1 \leq i \leq m+1, \sum_{i=1}^{m+1} x_i = 1 \right\}$$

în el însuși.

Vom spune că șirul de variabilele aleatoare $(\xi_n)_{n \in N^*}$ formează un lanț cu legături complete³, dacă

$$p_{i_1 \dots i_n, j} = \varphi_{i_n, j}^{(n)}(p_{i_1 \dots i_n}), \quad n > 1,$$

$$p_{i_1, j} = \varphi_{i_1, j}^{(1)}(p), \quad n = 1,$$

unde

$$p_j = P(\xi_1(\omega) = S_j), \quad 1 \leq j \leq m+1,$$

este repartiția inițială, iar

$$p = (p_1, \dots, p_{m+1}), p_{i_1 \dots i_{n-1}} = (p_{i_1 \dots i_{n-1}, 1}, \dots, p_{i_1 \dots i_{n-1}, m+1}), \quad n > 1.$$

¹ $N^* = \{1, 2, \dots\}$.

² Evident, considerăm numai traiectorii $S_{i_1} \dots S_{i_n}$ pentru care $P(\xi_1(\omega) = S_{i_1}, \dots, \xi_n(\omega) = S_{i_n}) > 0$.

³ Lanțurile cu legături complete au fost introduse în teoria probabilităților în lucrarea [7]; pentru detalii, vezi monografia [2].

2. Să vedem acum cum poate fi modelat cu ajutorul numerelor aleatoare un experiment care se realizează după un lanț cu legături complete.

Pentru aceasta, ne alegem un șir de numere aleatoare uniform repartizate, să spunem $(x_n)_{n \in N^*}$. Să formăm mărimile

$$r_0 = 0, \\ r_k = \sum_{l=1}^k p_l, \quad 1 \leq k \leq m+1.$$

Cu ajutorul lor procedăm în felul următor: luăm numărul aleator x_1 și notăm cu i_1 acel indice pentru care are loc inegalitatea

$$r_{i_1-1} < x_1 \leq r_{i_1};$$

în acest fel determinăm prima stare S_{i_1} . Mai departe, luăm numărul aleator următor x_2 și notăm cu i_2 acel indice pentru care are loc inegalitatea

$$r_{i_1, i_2-1} < x_2 \leq r_{i_1, i_2},$$

unde

$$r_{i_1, 0} = 0, \\ r_{i_1, k} = \sum_{l=1}^k \varphi_{i_1, l}(\mathbf{p}), \quad 1 \leq k \leq m+1;$$

în acest fel determinăm a doua stare S_{i_2} . Procedînd mereu în acest fel, ajungem la un moment dat să luăm numărul aleator x_n și să notăm cu i_n acel indice pentru care are loc inegalitatea

$$r_{i_1 \dots i_{n-1}, i_n-1} < x_n \leq r_{i_1 \dots i_{n-1}, i_n}$$

unde

$$r_{i_1 \dots i_{n-1}, 0} = 0, \\ r_{i_1 \dots i_{n-1}, k} = \sum_{l=1}^k \varphi_{i_1 \dots i_{n-1}, l}(\mathbf{p}_{i_1 \dots i_{n-2}}), \quad 1 \leq k \leq m+1;$$

în acest fel determinăm starea S_{i_n} . Prin urmare, am reușit să obținem pe această cale traiectoria $S_{i_1} \dots S_{i_n}$.

3. Să notăm cu $\eta_{n, j}$, $n \in N^*$, $1 \leq j \leq m+1$, variabila aleatoare care ia valorile $p_{i_1} \dots i_{n, j}$ în funcție de diversele traiectorii $S_{i_1} \dots S_{i_n}$. Evident, aceste valori sînt luate respectiv cu probabilitățile

$$p_{i_1} \varphi_{i_1, i_2}^{(1)}(\mathbf{p}) \varphi_{i_2, i_3}^{(2)}(\mathbf{p}_{i_1}) \dots \varphi_{i_{n-1}, i_n}^{(n-1)}(\mathbf{p}_{i_1 \dots i_{n-2}}).$$

Atunci obținem

$$M(\eta_{n, j}) = P(\xi_{n+1}(\omega) = j);$$

prin urmare, putem lua ca valoare aproximativă a probabilității $P(\xi_{n+1}(\omega) = j)$ expresia

$$P(\xi_{n+1}(\omega) = j) \approx \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k p_{i_1(l)} \dots i_n(l), \quad j, \quad (1)$$

unde $S_{i_1(l)} \dots S_{i_n(l)}$ este traiectoria care se obține în modelarea de rang l , $1 \leq l \leq k$. Desigur, pentru aprecierea eficacității aplicării metodei Monte-Carlo este necesar să evaluăm dispersia variabilei aleatoare $\eta_{n,j}$ și să aplicăm diverse procedee de reducere a ei (vezi, de exemplu, [1], [3], [8]).

Să presupunem acum că lanțul cu legături complete considerat este *ergodic*, adică limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi_{n+1}(\omega) = j) = P_j^{(\infty)}, \quad 1 \leq j \leq m+1,$$

există și nu depinde de repartiția inițială $\mathbf{p}$. Atunci, evident

$$P_j^{(\infty)} = \lim_{n \rightarrow \infty} M(\eta_{n,j}), \quad 1 \leq j \leq m+1,$$

de unde deducem că pentru un n suficient de mare putem lua ca valoare aproximativă pentru aceste cantități expresiile (1), calculate pornind de la o repartiție inițială arbitrară $\mathbf{p}$. Desigur, valori și mai precise vom obține dacă vom face media aritmetică a unui număr de serii de modelări, plecând de la repartiții inițiale diferite.

Dacă punem

$$\eta_{(n),j} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \eta_{n,i}, \quad 1 \leq j \leq m+1,$$

unde

$$\eta_{0,j} = P(\xi_1(\omega) = j), \quad 1 \leq j \leq m+1,$$

atunci

$$\eta_{(n),j} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} P(\xi_i(\omega) = j)$$

și din [6] (p. 345) rezultă că

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} M(\eta_{(n),j}) &= P_j^{(\infty)}, \quad 1 \leq j \leq m+1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} D^2(\eta_{(n),j}) &= 0, \quad 1 \leq j \leq m+1. \end{aligned}$$

De aici deducem că

$$D^2(\eta_{n,j}) = o(n^2), \quad 1 \leq j \leq m+1,$$

deoarece, evident,

$$\frac{1}{(n+1)^2} D^2(\eta_{n,j}) \leq D^2(\eta_{(n),j}), \quad 1 \leq j \leq m+1.$$

Prin urmare, pentru calculul aproximativ al cantităților $P_j^{(\infty)}$, $1 \leq j \leq m+1$, putem folosi și variabilele aleatoare $\eta_{(n),j}$, $1 \leq j \leq m+1$.

4. Aici am examinat numai un tip de ergodicitate; evident, modelarea descrisă mai sus se poate aplica la orice tip de ergodicitate. De asemenea, extinderea acestei modelări la cazul lanțurilor cu legături complete multiple este imediată și nu vom mai insista asupra ei.

¹ Pentru expresia cantităților $P_j^{(\infty)}$, $1 \leq j \leq m+1$, în cazul lanțurilor cu legături complete omogene liniare, vezi [4], [5].

BIBLIOGRAFIE

1. Н. П. Бусленко *и др.*: Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). Москва, 1962.
2. G. Ciucu, R. Theodorescu: Procese cu legături complete. Ed. Acad. R.P.R., București, 1960.
3. J. M. Hammersley, D. C. Handscomb: Monte Carlo Methods. Londra, 1964.
4. M. Iosifescu, R. Theodorescu: Some remarks on certain models for learning. *Rev. math. pures et appl.*, 1962, **7**, 425—437.
5. M. Iosifescu, R. Theodorescu: On the Bush-Mosteller learning models. *J. Math. Psychology*, 1965, **2**, 196—203.
6. G. Miho: Sur l'application de la méthode Monte-Carlo aux processus pour apprendre. *Rev. math. pures et appl.*, 1963, **8**, 337—347.
7. O. Onicescu, G. Miho: Sur les chaines de variables statistiques. *Bull. Sci. Math.*, 1935, **59**, 174—192.
8. M. Stoka, R. Theodorescu: Probabilitate și geometrie. Ed. științifică, 1966.

МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО ПРИМЕНЁННЫЙ ЦЕПЯМ С ПОЛНЫМИ СВЯЗЯМИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В этой заметке описывается непосредственное моделирование цепей с полными связями при помощи случайных чисел и метод Монте-Карло вычисления предельных вероятностей в эргодическом случае.

A MONTE CARLO METHOD APPLIED TO CHAINS WITH COMPLETE CONNECTIONS

ABSTRACT

In this note the direct simulation of chains complete connections by means of random numbers and a Monte Carlo method for computing the limit probabilities in the ergodic case are described.

RELAȚII DIFERENȚIALE ÎNTRE PATRU CÎMPURI SPINORIALE ARBITRARE

ANATOLIE P. HRISTEV

Această lucrare asupra relațiilor *diferențiale* continuă o lucrare similară asupra relațiilor *algebrice* între patru cîmpuri spinoriale arbitrare [2,4], relații care sînt *independente de orice ecuație de cîmp* pe care ar verifica-o spinorii.

§ 1. Unificările covariante față de grupul conform

1°. *Covarianții biliniari.* În teoria relativistă a electronului, cu ajutorul celor 4 matrice Dirac anticomutative de ordinul IV γ_i ($i, j, k, l = 1, 2, \dots, 4$) se construiesc forme biliniare în cuadrspinor — funcție de undă, care au caracter tensorial (tensori Dirac) și descriu anumite mărimi fizice. Analog se construiesc covarianții biliniari a *doi* spinori arbitrari (tensori L. De Broglie) care capătă semnificația de cîmpuri mezonice în teoria fuziunii particulelor elementare [7].

2°. *Grupul conform.* Relațiile de structură ale ansamblului matricelor Dirac coincid cu ecuațiile de structură ale grupului rotațiilor unui spațiu pseudoeuclidian hexadimensional E_6 de semnătură $+++--$ (H. Mandel 1929; K. Nikolski 1930, 1933; J. Schouten, J. Haantjes 1933). Grupul ortogonal al acestui spațiu este izomorf cu grupul *conform* al spațiului-timp relativist pseudoeuclidian E_4 (de semnătură $+++--$).

Grupul conform este constituit din transformările care conservă *unghiurile*, adică păstrează „asemănarea în mic” a figurilor, sau, încă, din transformările punctuale care conservă sferele. Grupul conform al spațiului-timp cuprinde în afară de transformările cunoscute ale grupului Lorentz (6 rotații, 4 translații, ogîndiri), dilatările uniforme (1 parametru), transformările „conforme speciale” (4 parametri) și inversiunile față de o sferă (în total 15 parametri). Ca semnificație fizică, covarianța conformă poate fi interpretată ca invarianța legilor fizicii în raport cu schimbările unităților de măsură (etaloanelor) [9].

În afară de reprezentările tensoriale în E_6 , grupul conform propriu are două reprezentări *spinoriale cuadridimensionale* (v. de ex. [9, 5]). Tensorii Dirac sau De Broglie se unifică deci în mod firesc în E_6 , în cadrul teoriei conforme; față de grupul Lorentz ei se transformă ca atare (separat), dar față de grupul conform (complet) ei se „amestecă” [5] (lucru impor-

tant în teoria forțelor nucleare pentru reducerea constantelor de cuplaj). Cuadrispinorii se transformă după una din cele două reprezentări spinoriale amintite.

3°. *Importanța*. Descoperirea a noi legi de conservare impune căutarea de noi proprietăți de covarianță a legilor fizice, căci după cunoscuta teoremă a lui E. Noether (1918) existența unui grup de simetrie implică existența unei anumite mărimi fizice și a legii respective de conservare.

Covarianța conformă capătă o importanță deosebită în teoria particulelor elementare (W. Heisenberg, H. P. Dürr și colab. 1959). Ecuațiile lui Maxwell sînt conform covariante (E. Cunningham, H. Bateman 1910). Grupul lui B. Touschek (1957) de transformări ale spinorilor reprezintă grupul dilatărilor uniforme ale spațiului-timp. Inversiunile față de o sferă ne conduc la teoria reciprocității a lui M. Born (1939) [8], adică la simetria legilor fizicii față de permutarea coordonatelor spațio-temporale cu variabilele dinamice impuls - energie. O interacție cuadrifermionică invariantă la *translații* în cadrul grupului *conform*, descrie cu succes interacțiunile slabe (J. E. Wess 1960; S. Watanabe 1957).

4°. Între patru spinori arbitrari sau între tensorii De Broglie corespunzători, *independent de orice ecuație de cîmp* pe care ar verifica-o spinorii, există anumite relații algebrice care au fost deduse covariant în E_6 în [2, 4]. În această lucrare vom stabili relațiile *diferențiale* care există între patru spinori arbitrari (sau între tensorii De Broglie corespunzători), *independent de orice ecuație de cîmp* verificată de spinori.

Relațiile algebrice din [2, 4] și cele diferențiale de mai jos prezintă interes între altele, de exemplu, pentru teoria fuziunii particulelor elementare (cîmpuri mezonice) și pentru teoria „interacțiunii universale cuadrifermionice” (realizată de 4 fermioni de spin 1/2).

§ 2. Unificarea matricelor și tensorilor. Identități matriciale covariante

1°. *Matrice și tensori*. Matricele Dirac se unifică în E_6 într-un „tensor matricial” antisimetric $i_{ab} = -i_{ba}$ [1, 2] ($a, b, c, \dots = 1, 2, \dots, 6$):

$$i_{jk} \equiv -i \gamma_j \gamma_k \quad (j \neq k), \quad i_{5k} \equiv -i \gamma_5 \gamma_k, \quad i_{6k} \equiv \gamma_k, \quad i_{65} \equiv \gamma_5; \\ i \equiv \sqrt{-1}, \quad \gamma_5 \equiv \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4, \quad \gamma_j \gamma_k + \gamma_k \gamma_j = 2\delta_{jk}. \quad (2.1)$$

Cea de-a doua unificare (*necchivalentă* cu prima (2.1)) se obține schimbînd semnul matricelor γ_j și γ_5 (adică semnul ultimei linii și coloane în i_{cb}) [9, 5].

Tensorii de Broglie (covarianții biliniari a doi spinori) se unifică în doi tensori „duali” antisimetrice [1, 2]:

$$p_{ab}^{\pm} \equiv \frac{2}{\varphi} \pm i_{ab} \frac{1}{\varphi}, \quad p_0^{\pm} \equiv \frac{2}{\varphi} \pm \frac{1}{\varphi}; \quad \varphi^+ \equiv \varphi^* \gamma_4, \quad \varphi^- \equiv i \varphi^* \gamma_4 \gamma_5, \quad (2.2)$$

unde $\overset{1}{\varphi}, \overset{2}{\varphi}$ sînt doi spinori arbitrari. Dacă $\overset{1}{\varphi} \equiv \overset{2}{\varphi}$, se obțin tensorii Dirac (covarianții biliniari ai unui spinor) unificați în E_6 :

$$\varphi_{ab}^{\pm} \equiv \varphi^{\pm} i_{ab} \varphi, \quad \varphi_0^{\pm} \equiv \varphi^{\pm} \varphi. \quad (2.2')$$

Semnificația componentelor p_{ab} (v. [1, 2, 4, 5]):

$$H_{ij} \equiv -\frac{i}{2} \overset{2}{\varphi}^+ \gamma_{(i} \gamma_{j)} \overset{1}{\varphi} \equiv p_{ij}^+ = \frac{i}{2} \varepsilon_{ij}{}^{kl} p_{kl}^- - \text{cîmp mezonice vectorial (de tip$$

Proca) (tensor antisimetric în E_4),

$$V_j \equiv i \overset{2}{\varphi}^+ \gamma_j \overset{1}{\varphi} \equiv i p_{5j}^+ = i p_{5j}^- - \text{potențialul mezonice vectorial (vector în } E_4),$$

$$U_j \equiv i \overset{2}{\varphi}^+ \gamma_5 \gamma_j \overset{1}{\varphi} \equiv -p_{5j}^+ = p_{6j}^- - \text{cîmp mezonice pseudoscalar (pseudo-vector în } E_4),$$

$$N_0 \equiv \overset{2}{\varphi}^+ \overset{1}{\varphi} \equiv p_0^+ \equiv i p_{56}^- \text{ și } M_0 \equiv i \overset{2}{\varphi}^+ \gamma_5 \overset{1}{\varphi} \equiv -i p_{56}^+ \equiv p_0^- - \text{potențialele mezonice (scalar și pseudoscalar în } E_4).$$

În cazul $\overset{2}{\varphi} \equiv \overset{1}{\varphi}$ obținem covarianții biliniari Dirac avînd semnificația cunoscută a densităților: M_{ij} — moment magnetoelectric, C_j — curentul, S_j — spinul, J_0 și I_0 — scalarul și pseudoscalarul.

2°. *Identități matriciale.* Fie $[abc \dots]$ — antisimetrizarea și $|abc \dots|$ — suma după permutările ciclice ale indicilor respectivi; $\varepsilon_{abcdef} = \pm 1$ după paritatea permutării indicilor (pseudotensorul unitate complet antisimetric al lui Levi-Civita în E_6); δ_{ab} — tensorul metric al lui E_6 (coincide cu simbolul Kronecker δ_a^b pentru alegerea $x^A \equiv ict$ și $x^6 \equiv il'$); acolo unde apar simultan doi indici numerici superiori și semnele $\pm$ convenim să luăm separat *primii* indici numerici cu semnul *superior* și separat indicii *secunzi* cu semnul *inferior*. Fie „matricele (anti) simetrizate de fuziune” (de ordinul 16) [4]:

$$\begin{aligned} (a) \quad & (\Gamma_{ab}^1)_{ikjl} \equiv \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{ab} + \frac{1}{2} (i_{c[a} i_{b]})_{ij} (i_{b]})_{kl}, \\ (a') \quad & (\Gamma)_{ikjl} \equiv \frac{1}{2} \delta^{ab} (\Gamma_{ab}^1)_{ikjl} \equiv 3\delta_{ij} \delta_{kl} - \frac{1}{2} (i_{ab})_{ij} (i^{ab})_{kl}, \\ (b) \quad & (\Gamma_{ab}^2)_{ikjl} \equiv \delta_{ij} (i_{ab})_{kl} + (i_{ab})_{ij} \delta_{kl} - \frac{1}{4} \varepsilon_{abcdef} (i^{cd})_{ij} (i^{ef})_{kl}, \\ (c, d) \quad & (\Gamma_{ab}^{3,4})_{ikjl} \equiv \delta_{ij} (i_{ab})_{kl} - (i_{ab})_{ij} \delta_{kl} \mp \frac{1}{2i} (i_{c[a} i_{b]})_{ij} (i_{b]})_{kl}, \\ (e) \quad & (\Gamma_{ab}^5)_{ikji} \equiv \delta_{ij} (i_{ab})_{kl} + (i_{ab})_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{12} \varepsilon_{abcdef} (i^{cd})_{ij} (i^{ef})_{kl}, \\ (f) \quad & (\Gamma^6)_{ikji} \equiv 5\delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} (i_{ab})_{ij} (i^{ab})_{kl} \end{aligned} \quad (2.3)$$

cu proprietățile de simetrie :

$$\begin{aligned} (\Gamma_{ab}^{1,2})_{ikjl} &\equiv (\Gamma_{ab}^{1,2})_{kijl}, & (\Gamma_{ab}^{3,4})_{ikjl} &\equiv -(\Gamma_{ab}^{3,4})_{kijl}, \\ (\Gamma_{ab}^5)_{ikjl} &\equiv (\Gamma_{ab}^5)_{kijl}, & (\Gamma^6)_{ikjl} &\equiv (\Gamma^6)_{kijl}; \end{aligned} \quad (2.4)$$

Numai în virtutea anticomutativității maticelor γ_j (fără a presupune de exemplu hermiticitatea) rezultă identitățile matriciale covariante [2]:

$$\begin{aligned} (\Gamma^\alpha)_{ik[jl]} &= 0, & (\Gamma)_{ik[jl]} &= 0, \\ (\Gamma^r)_{ik[jl]} &= 0 & (\alpha = 1, 2, 3; r = 4, 5, 6) \end{aligned} \quad (2.5)$$

sau în virtutea proprietăților (2.4) :

$$\begin{aligned} (\Gamma^\beta)_{[ik]jl} &= 0, & (\Gamma)_{[ik]jl} &= 0, \\ (\Gamma^s)_{[ik]jl} &= 0 & (\beta = 1, 2, 4; s = 3, 5, 6). \end{aligned} \quad (2.5')$$

Convenim ca peste tot în această lucrare: $\alpha = 1, 2, 3; r = 4, 5, 6$ și $\beta = 1, 2, 4; s = 3, 5, 6$.

§ 3. Definiția mărimilor P_{abh}, P_h

1°. *Definiții*. Definim următoarele mărimi în E_6 (de tipul tensorului densității momentului cinetic ($\partial_h \equiv \partial/\partial x^h$)) :

$$\begin{aligned} P_{abh}^\pm &\equiv \frac{1}{2i} (\varphi^\pm i_{ab} \partial_h \varphi^\pm - \partial_h \varphi^\pm i_{ah} \varphi^\pm) \equiv -P_{bah}^\pm, \\ P_h^\pm &\equiv \frac{1}{2i} (\varphi^\pm \partial_h \varphi^\pm - \partial_h \varphi^\pm \varphi^\pm). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Pentru $\varphi^\pm \equiv \varphi$ vom folosi notațiile $\Phi_{abh}^\pm, \Phi_h^\pm$.

Derivatele ∂_5, ∂_6 au pentru moment un sens *formal*; putem presupune de exemplu pentru spinori o dependență exponențială-periodică de $x^5 \equiv t'$ și $x^6 \equiv il'$ ($h = c = 1, p_5 = m$ — masa, $p_6 = im'$ — „pseudomasa”) (stări „staționare” în x^5, x^6).

$$\varphi \sim \exp i \rho (p_5 x^5 + p_6 x^6) \equiv \exp i \rho (mt' - m'l') (\rho = \text{const}), \quad (3.2)$$

$$\partial_5 \varphi = i \rho m \varphi, \partial_5 \varphi^\pm = -i \rho m \varphi^\pm; \partial_6 \varphi = -\rho m' \varphi, \partial_6 \varphi^\pm = \rho m' \varphi^\pm.$$

Dealtfel în relațiile diferențiale de mai jos putem considera numai derivatele după x^k (spațio-temporale), indicele h fiind arbitrar.

La fel ca pentru $p_{ab}^\pm$ și $\varphi_{ab}^\pm$, relațiile de „dualitate” pentru $P_{abh}^\pm$ (în indicii a, b) sînt [1, 2]:

$$\begin{aligned} P_{ijh}^+ &= \frac{i}{2} \varepsilon_{ij}^{kl} P_{klh}^-, & P_{5jh}^+ &= -P_{6jh}^-, & P_{6jh}^+ &= P_{5jh}^-, \\ P_{56h}^+ &= i P_h^-, & P_{56h}^- &= -i P_h^+ \end{aligned} \quad (3.3)$$

și la fel pentru $\Phi_{abh}^\pm, \Phi_h^\pm$.

2°. *Interpretări.* Componentele $\Phi_{\delta jk}^+ = \Phi_{\delta jk}^-$ dau tensorul energie-impuls clasic Θ_{jk} din teoria lui Dirac a electronului :

$$\Phi_{\delta jk}^+ = \Phi_{\delta jk}^- \equiv -i\Theta_{jk}, \quad \Theta_{jk} \equiv \frac{1}{2}(\varphi^+ \gamma_j \partial_k \varphi - \partial_k \varphi^+ \gamma_j \varphi). \quad (3.4)$$

Mai general, introducem „tensorul energie-impuls mezonice” :

$$P_{\delta jk}^+ = P_{\delta jk}^- \equiv -iT_{jk}, \quad T_{jk} \equiv T_{jk}^+ \equiv \frac{1}{2}(\tilde{\varphi}^+ \gamma_j \partial_k \varphi - \partial_k \tilde{\varphi}^+ \gamma_j \varphi) \quad (3.5)$$

și „pseudotensorul energie-impuls mezonice” :

$$\begin{aligned} P_{\delta jk}^- &= -P_{\delta jk}^+ \equiv T_{jk}^- \equiv \tilde{T}_{jk} \equiv \frac{1}{2i}(\tilde{\varphi}^- \gamma_j \partial_k \varphi - \partial_k \tilde{\varphi}^- \gamma_j \varphi) = \\ &= \frac{1}{2}(\tilde{\varphi}^+ \gamma_5 \gamma_j \partial_k \varphi - \partial_k \tilde{\varphi}^+ \gamma_5 \gamma_j \varphi). \end{aligned} \quad (3.5')$$

Componentele $\Phi_k^\pm$ dau vectorul și pseudovectorul Gordon (v. de ex. [10]) :

$$\begin{aligned} \Phi_k^+ &\equiv \frac{1}{2i}(\varphi^+ \partial_k \varphi - \partial_k \varphi^+ \varphi), \\ \Phi_k^- &\equiv \frac{1}{2i}(\varphi^- \partial_k \varphi - \partial_k \varphi^- \varphi) = \frac{1}{2}(\varphi^+ \gamma_5 \partial_k \varphi - \partial_k \varphi^+ \gamma_5 \varphi). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Mai general, introducem „vectorii mezonici” corespunzători :

$$\begin{aligned} P_k^+ &\equiv \frac{1}{2i}(\tilde{\varphi}^+ \partial_k \varphi - \partial_k \tilde{\varphi}^+ \varphi), \\ P_k^- &\equiv \frac{1}{2i}(\tilde{\varphi}^- \partial_k \varphi - \partial_k \tilde{\varphi}^- \varphi) = \frac{1}{2}(\tilde{\varphi}^+ \gamma_5 \partial_k \varphi - \partial_k \tilde{\varphi}^+ \gamma_5 \varphi). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dacă admitem ipoteza (3.2), obținem următoarele valori pentru componentele care conțin derivatele ∂_5, ∂_6 :

$$\begin{aligned} P_{ab5}^\pm &= \rho m p_{ab}^\pm, & P_{ab6}^\pm &= i \rho m' p_{ab}^\pm, \\ P_5^\pm &= \pm i P_{565}^\mp = \rho m p_0^\pm, & P_6^\pm &= \pm i P_{566}^\mp = i \rho m' p_0^\pm. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Toate relațiile algebrice și diferențiale stabilite în această lucrare se bazează *exclusiv* pe relațiile de anticomutare ale matricelor Dirac γ_j (2.1) și în acest sens pot fi privite ca *identități* (fiind independente de orice ecuație de câmp).

§ 4. Relațiile algebrice tensoriale

1°. *Notatii.* Fie φ^i , $i = 1, 2, \dots$ un număr oarecare de spinori arbitrari. Vom preciza notația tensorilor astfel:

$$\begin{aligned} p_{ab}^{\pm ik} &\equiv \varphi^{\pm i} i_{ab}^k \varphi^{\pm ik}, \quad P_{abh}^{\pm ik} \equiv \frac{1}{2i} (\varphi^{\pm i} i_{ab}^k \partial_h \varphi^{\pm ik} - \partial_h \varphi^{\pm i} i_{ab}^k \varphi^{\pm ik}), \\ p_0^{\pm ik} &\equiv \varphi^{\pm i} \varphi^{\pm k}, \quad P_h^{\pm ik} \equiv \frac{1}{2i} (\varphi^{\pm i} \partial_h \varphi^{\pm k} - \partial_h \varphi^{\pm i} \varphi^{\pm k}). \end{aligned} \quad (4.1)$$

În cazul $i = 2, k = 1$ vom păstra notația simplă (2.2).

În toate relațiile „pure”, valabile separat pentru indicele $+$ și separat pentru indicele $-$, vom omite pentru simplificare indicii $\pm$ la tensorii p_{ab} , P_{abh} , p_0 etc.

Fie notațiile [4]:

$$\begin{aligned} (a) \quad L(p, q) &\equiv p_0 q_0 \delta_{ab} + \frac{1}{2} p_{c[a} q_{b]}^c \equiv L(q, p), \\ (a') \quad L(p, q) &\equiv 3p_0 q_0 - \frac{1}{2} p_{ab} q^{ab} \equiv L(q, p), \\ (b) \quad L(p, q) &\equiv p_0 q_{ab} + p_{ab} q_0 - \frac{1}{4} \varepsilon_{ab}{}^{cdef} p_{cd} q_{ef} \equiv L(q, p), \\ (c, d) \quad L(p, q) &\equiv p_{[a} q_{b]} - p_{ab} q_0 \mp \frac{1}{2i} p_{c[a} q_{b]}^c \equiv -L(q, p), \\ (e) \quad L(p, q) &\equiv p_0 q_{ab} + p_{ab} q_0 + \frac{1}{12} \varepsilon_{ab}{}^{cdef} p_{cd} q_{ef} \equiv L(q, p), \\ (f) \quad L(p, q) &\equiv 5 p_0 q_0 + \frac{1}{2} p_{ab} q^{ab} \equiv L(q, p). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Aceste notații sînt într-un anumit sens „izomorfe” cu (2.3) „dedublate” și cu proprietățile de simetrie respective (2.4).

2°. „Conjugarea”. Cu ajutorul notațiilor (signatura spațiilor $E_6, \bar{E}_6$):

$$\{\varepsilon_a\} = \{+++++-\}; \quad \{\bar{\varepsilon}_a\} \equiv \{++++--\} \quad (4.3)$$

scriem regulile de comutare :

$$\gamma_4 i_{ab} = \varepsilon_a \varepsilon_b i_{ab} \gamma_4 ; \gamma_4 \gamma_5 i_{ab} = \bar{\varepsilon}_a \bar{\varepsilon}_b i_{ab} \gamma_4 \gamma_5 \quad (4.4)$$

(nicăieri nu se sumează după indicii lui ε_a sau $\bar{\varepsilon}_a$).

Dacă presupunem că matricele γ_j (deci și i_{ab}) sînt hermitice, conjugatul complex (ordinar) al tensorilor p_{ab} , P_{abh} va fi :

$$\begin{aligned} p_{ab}^{+*} &= \varepsilon_a \varepsilon_b p_{ab}^+, & p_{ab}^{-*} &= \bar{\varepsilon}_a \bar{\varepsilon}_b p_{ab}^-, & p_0^{\pm*} &= p_0^{\pm}; \\ P_{abh}^{+*} &= \varepsilon_a \varepsilon_b \varepsilon_h P_{abh}^+, & P_{abh}^{-*} &= \bar{\varepsilon}_a \bar{\varepsilon}_b \bar{\varepsilon}_h P_{abh}^-, & P_h^{\pm*} &= P_h^{\pm}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

În cazul metricii alese ($\delta_{ab} \equiv \delta_a^b$) definiția conjugatului complex covariant (notat cu steluța deasupra) al unui tensor este următoarea (v. de ex. [4]) :

$$\dot{T}_{abc\dots} = \varepsilon_a \varepsilon_b \varepsilon_c \dots T_{abc\dots}^* \quad (4.5')$$

Pentru i_{ab} hermitice conjugatul complex covariant al tensorilor p_{ab}^{+ij} (sau P_{abh}^{+ij}) coincide cu p_{ab}^{+ji} (respectiv P_{abh}^{+ji}).

Tensorii p_{ab} , p_{ab} (la fel P_{abh} , P_{abh}) care au spinorii permutați îi vom numi „conjugati” și vom introduce operația de „conjugare” prin care vom înțelege trecerea de la tensorii dați la cei „conjugati” ((în sensul definit mai sus) și schimbarea coeficientului $i \equiv \sqrt{-1}$ în $-i \equiv -\sqrt{-1}$). Pentru tensorii cu indicii $+$ (p_{ab}^+ , P_{abh}^+ etc.) operația de „conjugare” astfel definită coincide cu operația de conjugare complexă (covariantă).

Proprietățile exprimate de primul și ultimul membru din (4.2) în cazul $p \equiv q$ arată că expresiile (a , a' , b , e , f) sînt „autoconjugate”, iar (c , d) sînt „conjugate” între ele (adică trec una în alta prin operația de „conjugare”).

3°. *Relațiile algebrice* tensoriale sînt „izomorfe” cu identitățile matriciale (2.5) sau (2.5') [4] :

$$L(p, p)_{[ijl]}^{\alpha ij kl} = 0, \quad L(p, p)_{[ijl]}^{\tau ij kl} = 0 \quad (4.6)$$

sau sub forma echivalentă :

$$L(p, p)_{[ikl]}^{\beta ij kl} = 0, \quad L(p, p)_{[ikl]}^s ij kl = 0. \quad (4.6')$$

În membrii I ai acestor relații se subînțelege efectuată operația indicată în dreapta jos de simetrizare sau antisimetrizare după indicii indicați: de exemplu (4.6) se scrie dezvoltat astfel:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & (p_a p_0 + p_0 p_0) \delta_{ab} + \frac{1}{2} p_{c[a} p_{b]}^c + p_{c[a} p_{b]}^c = 0, \\
 \text{(a')} \quad & 3(p_0 p_0 + p_0 p_0) - \frac{1}{2} (p_{ab} p^{ab} + p_{cb} p^{ab}) = 0, \\
 \text{b)} \quad & p_0 p_{ab} + p_0 p_{ab} + p_0 p_{ab} + p_0 p_{ab} - \\
 & - \frac{1}{4} \varepsilon_{ab}^{cdef} (p_{cd} p_{ef} + p_{cd} p_{ef}) = 0, \\
 \text{(c, d)} \quad & p_0 p_{cb} \pm p_0 p_{ab} - p_0 p_{ab} \mp p_0 p_{ab} \mp \\
 & \mp \frac{1}{2i} (p_{c[a} p_{b]}^c \pm p_{c[a} p_{b]}^c) = 0, \\
 \text{(e)} \quad & p_0 p_{ab} - p_0 p_{ab} + p_0 p_{ab} - p_0 p_{ab} + \\
 & + \frac{1}{12} \varepsilon_{ab}^{cdef} (p_{cd} p_{ef} - p_{cd} p_{ef}) = 0, \\
 \text{(f)} \quad & 5(p_0 p_0 - p_0 p_0) + \frac{1}{2} (p_{ab} p^{ab} - p_{ab} p^{ab}) = 0
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

(în particular, $p_0^2 = \frac{1}{6} p_{ab} p^{ab}$).

Relațiile „mixte” se obțin atașind indicele + tensorilor care conțin indicele i și atașind indicele - tensorilor care conțin pe k .

Sistemul (4.6') se obține prin „conjugarea” sistemului (4.6). Este valabilă teorema generală:

Prin „conjugarea” relațiilor algebrice sau diferențiale („pure”) se obțin relații de asemenea valabile.

Relațiile generale (4.6) (sau (4.7)) dau cazuri particulare importante avînd semnificație fizică directă, de exemplu în teoria lui Dirac a electronului sau în teoria fuziunii particulelor elementare [4, 7].

§ 5. Relații diferențiale tensoriale

1°. *Sistemele diferențiale.* Pentru a obține relațiile diferențiale înmulțim (matricial) identitățile matriciale (2.5) cu $\varphi_i^{\pm} \varphi_j^{\pm} \varphi_k^{\pm} \partial_h \varphi_l^{\pm}$, respectiv $\varphi_i^{\pm} \varphi_j^{\pm} \partial_h \varphi_k^{\pm} \varphi_l^{\pm}$ și ținem seama de identitățile evidente ($p_{ab,h} \equiv \partial_h p_{at}$, $p_{0,h} \equiv \partial_h p_0$):

$$\begin{aligned} \varphi_i^{\pm} i_{ab} \partial_h \varphi^{\pm} &\equiv \frac{1}{2} p_{ab,h}^{\pm} + i P_{abh}^{\pm}, & \partial_h \varphi_i^{\pm} i_{ab} \varphi^{\pm} &\equiv \frac{1}{2} p_{ab,h}^{\pm} - i P_{abh}^{\pm}, \\ \varphi_i^{\pm} \partial_h \varphi^{\pm} &\equiv \frac{1}{2} p_{0,h}^{\pm} + i P_h^{\pm}, & \partial_h \varphi_i^{\pm} \varphi^{\pm} &\equiv \frac{1}{2} p_{0,h}^{\pm} - i P_h^{\pm} \end{aligned} \quad (5.1)$$

sau înmulțim direct identitățile matriciale (2.5) cu produsele unor expresii de forma: $\varphi_k^{\pm} \partial_h \varphi_l^{\pm} \pm \partial_h \varphi_k^{\pm} \varphi_l^{\pm}$. Se obține astfel teorema:

Fiecare identitate matricială (2.5) generează două relații tensoriale diferențiale generale cu patru spinori arbitrari.

În virtutea teoremei asupra „izomorfismului” dintre identitățile matriciale și relațiile tensoriale algebrice generale (cu 4 spinori arbitrari) [4], putem formula teorema astfel:

Fiecare relație algebrică tensorială (cu 4 spinori arbitrari) generează două relații diferențiale tensoriale (cu 4 spinori arbitrari).

Cu ajutorul notațiilor (4.2) cele două sisteme diferențiale I și II se scriu astfel:

$$(I) \begin{cases} \overset{\alpha}{L}(p, \partial p)_{[ijl]} = 2 i \overset{\alpha}{L}(p, P)_{[ijl]}, \\ \overset{r}{L}(p, \partial p)_{[ijl]} = 2 i \overset{r}{L}(p, P)_{[ijl]}; \end{cases} \quad (5.2)$$

$$(II) \begin{cases} \overset{\beta}{L}(p, \partial p)_{[ikl]} = -2 i \overset{\beta}{L}(p, P)_{[ikl]}, \\ \overset{s}{L}(p, \partial p)_{[ikl]} = -2 i \overset{s}{L}(p, P)_{[ikl]}. \end{cases} \quad (5.3)$$

Sistemele au o structură „simetrică”: în stînga avem derivatele $p_{ab,h}$ (notate ∂p), iar în dreapta tensorii P_{abh} (notați P).

Se observă că cele două sisteme sînt „conjugate” între ele, ceea ce demonstrează și în cazul diferențial teorema enunțată la 3° § 4.

Avem de asemenea următoarea teoremă:

Prin substituția

$$p_{ab,h} \rightarrow 2 i P_{abh}, \quad p_{0,h} \rightarrow 2 i P_h, \quad (5.4)$$

efectuată în relațiile diferențiale, se obțin relații de asemenea valabile.

În adevăr, fiecare relație din sistemele de mai sus (5.2—3) este invariata de substituția (5.4).

2°. *Consecințe.* Din sistemele diferențiale I (5.2) și II (5.3) rezultă, printr-o (anti) simetrizare adecvată a lor, următoarele sisteme diferențiale :

α) *Sistemul algebric* (4.6) (sau (4.6)) *derivat* :

$$(\alpha) \quad \begin{cases} \overset{1,2}{L}(p, \partial p)_{[ik][jl]} = 0, & \overset{5,6}{L}(p, \partial p)_{[ik][jl]} = 0, \\ \overset{3}{L}(p, \partial p)_{[ik][jl]} = 0, & \overset{4}{L}(p, \partial p)_{[ik][jl]} = 0, \end{cases} \quad (5.5)$$

unde cele două operații indicate de (anti)simetrizare sînt efectuate independent. Prin „conjugare” sistemul se reproduce ^{3,4} (L trec una în alta).

β) Un sistem „izomorf” cu (α) (5.5), obținut din acesta prin substituția (5.4). Sistemele (α) și (β) trec deci unul în altul prin această substituție, ceea ce verifică teorema de la 1°.

γ) Prin adunarea (sau scăderea) sistemelor I și II și ținînd seama de (α) (respectiv β), obținem :

$$(\gamma) \quad \begin{cases} \overset{1,2}{L}(p, \partial p) - \overset{1,2}{L}(p, \partial p) = 2i \overset{1,2}{L}(p, P) - 2i \overset{1,2}{L}(p, P), \\ \overset{3,4}{L}(p, \partial p) + \overset{3,4}{L}(p, \partial p) = \pm 2i \overset{3,4}{L}(p, P) \pm 2i \overset{3,4}{L}(p, P), \\ \overset{5,6}{L}(p, \partial p) - \overset{5,6}{L}(p, \partial p) = -2i \overset{5,6}{L}(p, P) + 2i \overset{5,6}{L}(p, P). \end{cases} \quad (5.6)$$

Sistemul se reproduce prin „conjugare” și fiecare relație a sa este invariata de substituția (5.4).

δ) Prin combinarea sistemului (γ) cu (β) se obține sistemul :

$$(\delta) \quad \begin{cases} \overset{1,2}{L}(p, \partial p) - \overset{1,2}{L}(p, \partial p) = 2i \overset{1,2}{L}(p, P)_{[jl]} + 2i \overset{1,2}{L}(p, P)_{[ik]}, \\ \overset{3}{L}(p, \partial p) + \overset{3}{L}(p, \partial p) = 2i \overset{3}{L}(p, P)_{[jl]} - 2i \overset{3}{L}(p, P)_{[ik]}, \\ \overset{4}{L}(p, \partial p) + \overset{4}{L}(p, \partial p) = 2i \overset{4}{L}(p, P)_{[jl]} - 2i \overset{4}{L}(p, P)_{[ik]}, \\ \overset{5,6}{L}(p, \partial p) - \overset{5,6}{L}(p, \partial p) = 2i \overset{5,6}{L}(p, P)_{[jl]} + 2i \overset{5,6}{L}(p, P)_{[ik]}. \end{cases} \quad (5.7)$$

Prin „conjugare” sau prin substituția (5.4) se obțin din (δ) sisteme egal valabile.

3°. *Implicații, echivalențe.* a) Ansamblul sistemelor (I, II) este echivalent cu ansamblul sistemelor (α, β, γ).

În adevăr, prin (anti) simetrizarea (după jl sau ik) a sistemului (γ) și ținînd seama de (α), (β) rezultă sistemele I, II.

b) Sistemul I (sau II) plus sistemul algebric derivat (α) dă sistemul (β). Aceasta se vede din mersul demonstrației de la 2° α), (β).

c) Sistemul (δ) (5.7) este echivalent cu ansamblul sistemelor (β , γ).

În adevăr, din (5.7) prin (anti) simetrizare după (ij , kl) se obține mai întâi (β), iar apoi cu ajutorul acestuia se obține și (γ).

d) Sînt echivalente următoarele ansamble de sisteme diferențiale :

$$(I, II) \sim (\alpha, \beta, \gamma) \sim (\alpha, \delta). \quad (5.8)$$

Fiind presupus cunoscut sistemul *algebric* (4.7), deci și sistemul algebric derivat (α) (5.5), putem păstra numai sistemul diferențial (δ) (5.7), care va implica atunci pe (I, II).

4°. Sistemele diferențiale „mixte” se obțin atașînd inicele + tensorilor care conțin indicele i , și atașînd indicele - celor care conțin pe k , la fel ca pentru sistemul algebric.

§ 6. Cazul a trei spinori

1°. Fie notațiile simplificate :

$$\begin{aligned} p_{ab} &\equiv p_{ab}, p_0 \equiv p_0; p_{ab} \equiv \tilde{p}_{ab}, p_0 \equiv \tilde{p}_0; p_{ab} \equiv p'_{ab}, p_0 \equiv p'_0; \\ p_{ab} &\equiv \varphi_{ab}, p_0 \equiv \varphi_0; p_{ab} \equiv \varphi_{ab}, p_0 \equiv \varphi_0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

și notații analoge pentru P_{abh} , P_h ; Φ_{abh} , Φ_h . Vom spune că tensorii Dirac φ_{ab} , φ_{ab} sînt „asociați” tensorilor De Broglie p_{ab} , $\tilde{p}_{ab}$.

De oarece de fiecare dată vom da sistemul *algebric*, pentru a nu încărca expunerea, nu vom mai scrie sistemul algebric *derivat* (α) și sistemul „izomorf” cu el, (β). De asemenea vom păstra din celelalte sisteme diferențiale numai relațiile „noi” față de (α), (β).

2°. În cazul $j = l$ (sau $i = k$) obținem relații de „cuplaj” între tensori De Broglie avînd *primul* (respectiv al doilea) *spinor comun* :

a) Relațiile algebrice (scriem numai cazul $j = l$; celălalt caz se obține prin „conjugare”) :

$$\overset{\alpha}{L}(p', p) = 0 \quad (6.2)$$

sau dezvoltat :

$$\begin{aligned} p'_0 p_0 \delta_{ab} + \frac{1}{2} p'_{c a} p_{b c} &= 0 \rightarrow 3 p'_0 p_0 - \frac{1}{2} p'_{ab} p^{ab} = 0, \\ p'_0 p_{ab} + p_0 p'_{ab} - \frac{1}{4} \varepsilon_{abcd} p'^{cd} p^{ef} &= 0, \\ p'_0 p_{ab} - p_0 p'_{ab} - \frac{1}{2i} p'_{c f a} p_{b c} &= 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

b) Relațiile diferențiale :

$$\begin{aligned}\overset{\alpha}{L}(p', \partial p) &= 2i\overset{\alpha}{L}(p', P) \rightarrow L(p', \partial p) = 2iL(p', P), \\ \overset{4}{L}(p', \partial p) + \overset{4}{L}(p, \partial p') &= -2i\overset{4}{L}(p', P) - 2i\overset{4}{L}(p, P'), \\ \overset{5,6}{L}(p', \partial p) - \overset{5,6}{L}(p, \partial p') &= -2i\overset{5,6}{L}(p', P) + 2i\overset{5,6}{L}(p, P').\end{aligned}\quad (6.4)$$

Identitățile „mixte” se obțin atașind indicele + mărimilor cu accent și indicele - mărimilor fără accent.

§ 7. Cazul „mezonice”

1°. Particularizînd cazul 2° § 6 ($i = k, j = l$), obținem relații de „autocuplaj” pentru tensorii De Broglie („identități diferențiale mezonice”).

a) Relațiile algebrice „pure” (pentru indicele + și separat -):

$$\begin{aligned}(a) \quad p_0^2 \delta_{ab} &= p_{ac} p_b^c \rightarrow p_0^2 = \frac{1}{6} p_{ab} p^{ab}, \\ (b) \quad p_0 p^{ab} &= \frac{1}{8} \varepsilon^{abcdef} p_{cd} p_{ef}\end{aligned}\quad (7.1)$$

și relațiile algebrice „mixte” :

$$\begin{aligned}(a) \quad p_0^+ p_0^- \delta_{ab} &= -\frac{1}{2} p_{|a}^+ p_{b|c}^- \rightarrow p_0^+ p_0^- = \frac{1}{6} p_{ab}^+ p^{ab-}, \\ (b) \quad p_0^{|+} p_{ab}^{-|} &= \frac{1}{4} \varepsilon_{ab}^{cdef} p_{cd}^+ p_{ef}^-, \\ (c) \quad p_0^{[+} p_{ab}^{-]} &= \frac{1}{2i} p_{[a}^+ p_{b]c}^-\end{aligned}\quad (7.2)$$

(relațiile (7.1a) și 7.1b) sînt echivalente între ele, iar cele „mixte” sînt o consecință a celor „pure” [2]).

b) Relațiile diferențiale „pure” :

$$\begin{aligned}(a) \quad p_0 p_{ab,h} - p_{ab} p_{0,h} &= -p_{[a}^c P_{b]ch}, \\ (b) \quad \frac{1}{4} p_{[a}^c p_{b]c,h} &= p_0 P_{abh} - p_{ab} P_h\end{aligned}\quad (7.3)$$

și relațiile diferențiale „mixte” :

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \delta_{ab} p_0^+ p_{0,h}^- + \frac{1}{2} p_{[a}^{e+} p_{b]c,h}^- = 2i [\delta_{ab} p_0^+ P_h^- + \frac{1}{2} p_{[a}^{e+} P_{b]ch}^-], \\
 (a') \quad & 3 p_0^+ p_{0,h}^- - \frac{1}{2} p^{ab+} p_{ab,h}^- = 2i [3 p_0^+ P_h^- - \frac{1}{2} p^{ab+} P_{abh}^-], \\
 (b) \quad & p_0^+ p_{ab,h}^- + p_{ab}^+ p_{0,h}^- - \frac{1}{4} \varepsilon_{ab}^{cdef} p_{cd}^+ p_{ef,h}^- = \\
 & = 2i [p_0^+ P_{abh}^- + p_{ab}^+ P_h^- - \frac{1}{4} \varepsilon_{ab}^{cdef} p_{cd}^+ P_{efh}^-], \\
 (c) \quad & p_0^+ p_{ab,h}^- - p_{ab}^+ p_{0,h}^- - \frac{1}{2i} p_{[a}^{e+} p_{b]c,h}^- = \\
 & = 2i [p_0^+ P_{abh}^- - p_{ab}^+ P_h^- - \frac{1}{2i} p_{[a}^{e+} P_{b]ch}^-], \quad (7.4) \\
 (d) \quad & p_0^{[+} p_{ab,h}^{-]} - p_{ab}^{[+} p_{0,h}^{-]} + \frac{1}{2i} p_{[a}^{e[+} p_{b]c,h}^{-]} = \\
 & = -2i [p_0^{[+} P_{abh}^{-]} - p_{ab}^{[+} P_h^{-]} + \frac{1}{2i} p_{[a}^{e[+} P_{b]ch}^{-]}], \\
 (e) \quad & p_0^{[+} p_{ab,h}^{-]} + p_{ab}^{[+} p_{0,h}^{-]} + \frac{1}{12} \varepsilon_{ab}^{cdef} p_{cd}^{[+} p_{ef,h}^{-]} = \\
 & = -2i [p_0^{[+} P_{abh}^{-]} + p_{ab}^{[+} P_h^{-]} + \frac{1}{12} \varepsilon_{ab}^{cdef} p_{cd}^{[+} P_{efh}^{-]}], \\
 (f) \quad & 5 p_0^{[+} p_{0,h}^{-]} + \frac{1}{2} p^{ab[+} p_{ab,h}^{-]} = -2i [5 p_0^{[+} P_h^{-]} + \\
 & + \frac{1}{2} p^{ab[+} P_{abh}^{-]}],
 \end{aligned}$$

avînd între altele următoarele consecințe :

$$\begin{aligned}
 (c') \quad & \frac{1}{4} p_{[a}^{e[+} p_{b]c,h}^{-]} = p_0^{[+} P_{abh}^{-]} - p_{ab}^{[+} P_h^{-]}, \\
 (d') \quad & - p_{[a}^{e[+} P_{b]ch}^{-]} = p_0^{[+} p_{ab,h}^{-]} - p_{ab}^{[+} p_{0,h}^{-]}, \\
 (a'') \quad & 2i p_0^{[+} p_{0,h}^{-]} = p_0^{[+} P_h^{-]} + \frac{1}{2} p^{ab[+} P_{abh}^{-]}, \\
 (f') \quad & - 8i p_0^{[+} P_h^{-]} = p_0^{[+} p_{0,h}^{-]} + \frac{1}{2} p^{ab[+} p_{ab,h}^{-]}. \quad (7.4')
 \end{aligned}$$

2°. Evident, toate relațiile (algebrice sau diferențiale) verificate de tensorii „mezonici” sînt valabile și pentru tensorii Dirac (covarianții biliniari ai unui câmp spinorial); trebuie schimbate doar notațiile :

$$p_{ab} \rightarrow \varphi_{ab}, \quad p_0 \rightarrow \varphi_0; \quad P_{abh} \rightarrow \Phi_{abh}, \quad P_h \rightarrow \Phi_h. \quad (7.5)$$

Relațiile „mixte” au fost obținute din (6.3—4) înlocuind accentul cu indicele + și atașînd indicele — mărimilor fără accent.

§ 8. Relații de „interacție”

Cazurile $j = k = l$ și $i = j = k$ (se obțin prin particularizarea cazurilor 2° § 6) dau relații de „interacție” între tensorii De Broglie și tensorii Dirac „asociați”.

a) Relațiile algebrice :

$$(a) \quad \overset{\alpha}{L}(p, \overset{1}{\varphi}) = 0; \quad (b) \quad \overset{\beta}{L}(p, \overset{2}{\varphi}) = 0 \quad (8.1)$$

sau dezvoltat :

$$\begin{aligned} p_0 \overset{1,2}{\varphi}_0 \delta_{ab} + \frac{1}{2} p_{[a}^{\overset{1,2}{c}} \varphi_{b]c} &= 0 \rightarrow p_0 \overset{1,2}{\varphi}_0 = \frac{1}{6} p_{ab} \overset{1,2}{\varphi}^{ab}, \\ p_0 \overset{1,2}{\varphi}_{ab} + p_{ab} \overset{1,2}{\varphi}_0 - \frac{1}{4} \varepsilon_{abcd} p^{cd} \overset{1,2}{\varphi}^{ef} &= 0, \\ p_0 \overset{1,2}{\varphi}_{ab} - p_{ab} \overset{1,2}{\varphi}_0 \mp \frac{1}{2i} p_{[a}^{\overset{1,2}{c}} \varphi_{b]c} &= 0. \end{aligned} \quad (8.2a,b)$$

Sistemele (8.1 la, b) (sau (8.2a, b)) se obțin unul din altul prin „conjugare”.

b) Relațiile diferențiale :

$$\begin{aligned} \overset{\alpha}{L}(p, \overset{1}{\partial\varphi}) &= 2i \overset{\alpha}{L}(p, \overset{1}{\Phi}) \rightarrow L(p, \overset{1}{\partial\varphi}) = 2i L(p, \overset{1}{\Phi}), \\ \overset{4}{L}(p, \overset{1}{\partial\varphi}) + \overset{4}{L}(\varphi, \overset{1}{\partial p}) &= -2i \overset{4}{L}(p, \overset{1}{\Phi}) - 2i \overset{4}{L}(\varphi, \overset{1}{P}), \\ \overset{5,6}{L}(p, \overset{1}{\partial\varphi}) - \overset{5,6}{L}(\varphi, \overset{1}{\partial p}) &= -2i \overset{5,6}{L}(p, \overset{1}{\Phi}) + 2i \overset{5,6}{L}(\varphi, \overset{1}{P}) \end{aligned} \quad (8.3)$$

și sistemul obținut prin „conjugare” (care va conține pe $\overset{2}{\varphi}_{ab}$).

§ 9. Relații de „fuziune” și „fisiune”

Cazul $i = j, k = l$ dă relații între tensorii de Broglie („conjugăți”) și tensorii Dirac asociați. După cum se vede mai jos, ele arată într-un anumit sens o „echivalență” între tensorii De Broglie și cei doi tensori Dirac asociați. Putem spune altfel, că relațiile de mai jos descriu „gene-

rarea" cîmpului mezonice p_{ab} (și a cîmpului „conjugat” $\tilde{p}_{ab}$) prin „fuziunea” a două cîmpuri fermionice (spinoriale) φ_{ab} , și reciproc : „fisiunea” cîmpului mezonice în două cîmpuri fermionice (spinoriale) asociate (în mod covariant în E_6).

a) Relațiile algebrice :

$$\overset{\alpha}{L}(p, \tilde{p}) = - \overset{2}{L}(\overset{1}{\varphi}, \overset{1}{\varphi}), \quad \overset{r}{L}(p, \tilde{p}) = \overset{r}{L}(\overset{2}{\varphi}, \overset{1}{\varphi}). \quad (9.1)$$

b) Relațiile diferențiale :

$$(\gamma) \begin{cases} \overset{1,2}{L}(\overset{2}{\varphi}, \overset{1}{\partial} \overset{1}{\varphi})_{[1,2]} = 2i \overset{1,2}{L}(p, \tilde{P}) - 2i \overset{1,2}{L}(\tilde{p}, P), \\ \overset{3,4}{L}(\overset{2}{\varphi}, \overset{1}{\partial} \overset{1}{\varphi})_{[1,2]} = \pm 2i \overset{3,4}{L}(p, \tilde{P}) \pm 2i \overset{3,4}{L}(\tilde{p}, P), \\ \overset{5,6}{L}(\overset{2}{\varphi}, \overset{1}{\partial} \overset{1}{\varphi})_{[1,2]} = - 2i \overset{5,6}{L}(p, \tilde{P}) + 2i \overset{5,6}{L}(\tilde{p}, P) \end{cases} \quad (9.2)$$

și relații asemănătoare obținute prin substituția (5.4).

§ 10. Observații finale

Vom face câteva observații relativ la cazul „mezonice” § 7.

1°. *Tensorul energie-impuls*. Deși, după cum se vede din (7.3b), mărimile P_{abh} se exprimă prin vectorul P_h și prin tensorul p_{ab} și derivatele acestuia :

$$(a) \quad p_0 P_{abh} = p_{ab} P_h + \frac{1}{4} p_{[a}^c p_{b]c,h} = p_{ab} P_h + \frac{1}{2} p_a^c p_{bc,h} + \frac{1}{2} \delta_{ab} p_0 p_{0,h}, \quad (10.1)$$

$$(b) \quad p_0^{l+} P_{abh} = p_{ab}^{l+} P_h^{-l} + \frac{1}{4} p_{[a}^{c l+} p_{b]c,h}^{-l} = p_{ab}^{l+} P_h^{-l} + \frac{1}{2} p_a^{c l+} p_{bc,h}^{-l} + \frac{1}{2} \delta_{ab} p_0^{l+} p_{0,h}^{-l},$$

totuși toate componentele P_{abh} trebuie să corespundă anumitor mărimi fizice. De altfel și tensorul densității momentului cinetic (în E_4) se exprimă prin coordonate și prin tensorul energie-impuls, și chiar mai simplu (algebric!), și totuși are o semnificație fizică precisă.

Din (10.1) obținem în particular expresiile (pseudo) tensorilor energie-impuls (3.4–5) prin (pseudo) vectorul Gordon (3.6–7) :

$$\begin{aligned} T_{jk} &= i P_{6jk}^+ = i P_{5jk}^-; & \tilde{T}_{jk} &= - P_{5jk}^+ = P_{6jk}^-, \\ N_0 T_{jk} &= V_j P_k^+ + \frac{1}{2} (V^l H_{lj,k} - M_0 U_{j,k}), \\ M_0 T_{jk} &= V_j P_k^- + \frac{1}{2} (V^l \tilde{H}_{lj,k} + N_0 U_{j,k}), \\ N_0 \tilde{T}_{jk} &= U_j P_k^+ + \frac{1}{2} (U^l H_{lj,k} - M_0 C_{j,k}), \\ M_0 \tilde{T}_{jk} &= U_j P_k^- + \frac{1}{2} (U^l \tilde{H}_{lj,k} + N_0 V_{j,k}) \end{aligned} \quad (10.2)$$

și în cazul cîmpului spinorial Dirac :

$$\begin{aligned} J_0 \Theta_{jk} &= C_j \Phi_k^+ + \frac{1}{2} (C^l M_{lj,k} - I_0 S_{j,k}), \\ I_0 \Theta_{jk} &= C_j \Phi_k^- + \frac{1}{2} (C^l \tilde{M}_{lj,k} + J_0 S_{j,k}), \\ J_0 \tilde{\Theta}_{jk} &= S_j \Phi_k^+ + \frac{1}{2} (S^l M_{lj,k} - I_0 C_{j,k}), \\ I_0 \tilde{\Theta}_{jk} &= S_j \Phi_k^- + \frac{1}{2} (S^l \tilde{M}_{lj,k} + J_0 C_{j,k}), \end{aligned} \quad (10.3)$$

unde

$$\tilde{H}_{ij} \equiv -\frac{i}{2} \varepsilon_{ijkl} H^{kl}, \quad \tilde{M}_{ij} \equiv -\frac{i}{2} \varepsilon_{ijkl} M^{kl}.$$

Relațiile „mixte” (10.1b) sînt o consecință a celor „pure” (ele dau combinațiile :

$$J_0 \tilde{T}_{jk} - i I_0 T_{jk} \text{ și } I_0 \tilde{T}_{jk} + i J_0 T_{jk}.$$

2°. *Echivalențe, implicații.* a) Cu ajutorul *identității* valabile pentru orice mărimi antisimetrice X_{ab} , Y_{ab} (stabilită în [2]) :

$$\varepsilon_{abc}{}^{efg} (X_{de} Y_{fg} + X_{fg} Y_{de}) = \frac{1}{2} \delta_{dla} \varepsilon_{bcl}{}^{fopq} X_{fg} Y_{pq}, \quad (10.4)$$

se demonstrează, prin înmulțiri și contracții adecvate (se presupune $p_0 \neq 0$), teorema :

În virtutea relațiilor *algebrice*, relația (7.1a) *derivată* și relația (7.1b) *derivată* sînt *echivalente* (ceea ce era de așteptat în virtutea echivalenței relațiilor algebrice înseși [2]).

Exact la fel se demonstrează și echivalența dintre relațiile care se obțin prin substituția (5.4) din (7.1a, b) derivate, adică echivalența dintre relațiile „izomorfe” — prin această substituție — cu (7.1a, b) derivate.

b) În virtutea relației algebrice (7.1a), relația diferențială (7.3a) implică pe (7.1a) *derivată*, iar (7.3b) implică relația „izomorfă” — prin substituția (5.4) — cu (7.1a) *derivată*.

Aceasta se arată contractînd (7.3a, b) cu p^{ad} și apoi simetrizînd adecvat ($p_0 \neq 0$).

c) *În virtutea relației algebrice* (7.1a) și a *derivatei sale*, relația (7.3b) implică pe (7.3a).

Putem renunța la relația algebrică (7.1a) *derivată*, dacă scriem pe (7.3b) sub cea de a doua formă (10.1a). În adevăr, prin simetrizarea acesteia găsim pe (7.1a) *derivată*, iar prin antisimetrizare revenim la (7.3b).

Prin urmare, *sistemul algebric* (7.1a) și *sistemul diferențial* (7.3b) (sau (10.1a)) sînt *fundamentale*; ele implică toate celelalte relații algebrice și diferențiale („pure”).

Pentru cazul covarianțelor biliniari Dirac, sistemul (7.3 b) scris desfășurat în $E_3(E_4)$ dă 15 + 15 relații, care se identifică cu cele găsite în [10]. Bineînțeles, în [10] ele au fost găsite prin calcule extrem de lungi și de greoaie (și numai pentru cazul Dirac); este de ajuns să spunem că, de exemplu, cele două relații (7.1a, b) se regăsesc scrise în [10] ca 21 + 21, respectiv 15 + 15 relații separate („despicate” în E_3).

3°. *Ecuatii de câmp*. Luând divergența lui (7.1b) avem

$$(p_0 p^{ab})_{,b} = \frac{1}{4} \varepsilon^{abcdef} p_{bc} p_{de,f} \equiv \frac{1}{12} \varepsilon^{abcdef} p_{bc} p_{[de,f]}. \quad (10.5)$$

Dacă admitem ca *ecuație de câmp* posibilă (într-o teorie unitară conformă) un sistem de tipul primului sistem maxwellian în E_6 (rotor nul, câmpul p_{ab} derivă dintr-un potențial), atunci în virtutea lui (10.5) rezultă automat un sistem de tipul celui de al doilea sistem maxwellian :

$$(I) \quad p_{[ab,c]} = 0 \longrightarrow (II) \quad (p_0 p^{ab})_{,b} = 0. \quad (10.6)$$

Dacă în plus (dintr-un principiu variațional de exemplu) avem și ecuația de câmp $p^{ab}_{,b} = 0$, va rezulta automat $p_0^2 = \frac{1}{6} p_{ab} p^{ab} = \text{const.}$

Relația (7.1a) transcrisă astfel :

$$Q_{ab} \equiv p_{ac} p_b^c - \frac{1}{6} \delta_{ab} (p_{cd} p^{cd}) = 0 \quad (Q_a^a \equiv 0), \quad (10.7)$$

arată că Q_{ab} în E_6 este de aceeași formă ca tensorul energie-impuls maxwellian în E_4 . Relația (7.1a) înseamnă deci anularea în E_6 a tensorului Q_{ab} . Notînd

$$\begin{aligned} S_{ij} &\equiv p_{ii} p_j^i - \frac{1}{4} \delta_{ij} (p_{kl} p^{kl}), \quad (S_i^i \equiv 0), \\ 2S_{ij}^0 &\equiv p^{i+} p_{ij}^- - \frac{1}{2} \delta_{ij} (p_{kl}^+ p^{kl-}), \quad (S_i^{0i} \equiv 0), \end{aligned} \quad (10.8)$$

obținem din (10.7) :

$$\begin{aligned} S_{ij}^+ &= -S_{ij}^- = V_i V_j - U_i U_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (N_0^2 + M_0^2), \\ S_{ij}^0 &= -\frac{1}{2} \delta_{ij} N_0 M_0; \\ \Sigma_{ij}^+ &= -\Sigma_{ij}^- = C_i C_j - S_i S_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (J_0^2 + I_0^2), \\ \Sigma_{ij}^0 &= -\frac{1}{2} \delta_{ij} J_0 I_0. \end{aligned} \quad (10.9)$$

4.° *Generalizări.* Cu ajutorul congruențelor ortogonale [11] și a derivatei covariante a unui spinor, relațiile diferențiale stabilite se generalizează pentru spații *riemanniene*.

În *teoria cuantificării a doua spinorii* devin *operatori* (de generare și anihilare a particulelor), în general *necomutativi*. Atunci și cimpurile p_{ab} devin operatori necomutativi. Comutatorii acestor tensori au fost calculați în [6], iar relațiile algebrice în [12].

Primit 23.VI.1964

BIBLIOGRAFIE

1. A. Popovici: Rev. Math. pur. et appl. IV, 577 (1959); V, 411 (1960); Bull. Math. R.P.R. 3, 93 (1959); Comunic. Acad. R.P.R. VIII, 877 (1958); IX, 671 (1959).
2. A. P. Hristev: Lucrările Consfăturii Internaționale de Geometrie și Topologie, Iași 1958, pag. 203; Comunic. Acad. R.P.R. XI, 755, 761, (1961); Bull. Math. R.P.R. 4, 23 (1961).
3. A. Popovici, A. P. Hristev, I. Popovici: Comptes Rendus Acad. Paris 257, 3120 (1963).
4. A. P. Hristev: Rev. Roum. Math. pur. et appl. IX, 619 (1964); Stud. Cercet. Mat. XVI, 849 (1964).
5. A. P. Hristev: Analele Univ. București, seria mat., 1, 167 (1964).
6. A. P. Hristev: Rev. Roum. Math. pur. et appl. X, 297 (1965), Stud. Cercet. Mat. XVII, 95 (1965).
7. L. De Broglie: Théorie générale des particules à spin, 2^e éd., Paris, 1954.
8. R. L. Ingraham: Nuovo Cimento 12, 825 (1954).
9. H. A. Kastrup: Ann. d. Phys. 9, 388 (1962).
10. W. Kofink: Ann. d. Phys. 38, 421, 565 (1940).
11. G. Vrănceanu: Lecții de geometrie diferențială, vol. I, București, 1962; vol. II, București, 1934.
12. A. P. Hristev: Identități algebrice între covarianții biliniari ai cimpului spinorial cuantificat („teoria q'' ”), comunicat la Sesiunea Univ. București, 1962 (va apare).

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЧЕТЫРЬМЯ ПРОИЗВОЛЬНЫМИ СПИНОРНЫМИ ПОЛЯМИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

На основе матричных тождеств [2] устанавливаются дифференциальные соотношения для четырех произвольных спинорных полей: (5.2—3) или (5.6) (при обозначениях: (4.1), (2.1), (4.2)). Алгебраические соотношения суть (4.7) [2,4].

Никаких предположений, кроме антикоммутативности матриц Дирака, не делается, поэтому все соотношения независимы от каких-либо уравнений поля.

Особо рассматривается случай билинейных ковариантов двух произвольных спиноров (тензоры Дебройля): (7.1—4); например тождества для тензора энергии-импульса (10.2—3).

Указывается одно следствие для возможного вида уравнения поля: (10.6).

Результаты связаны с конформной группой релятивистского пространства—времени.

DIFFERENTIAL RELATIONS BETWEEN FOUR ARBITRARY SPINOR FIELDS

ABSTRACT

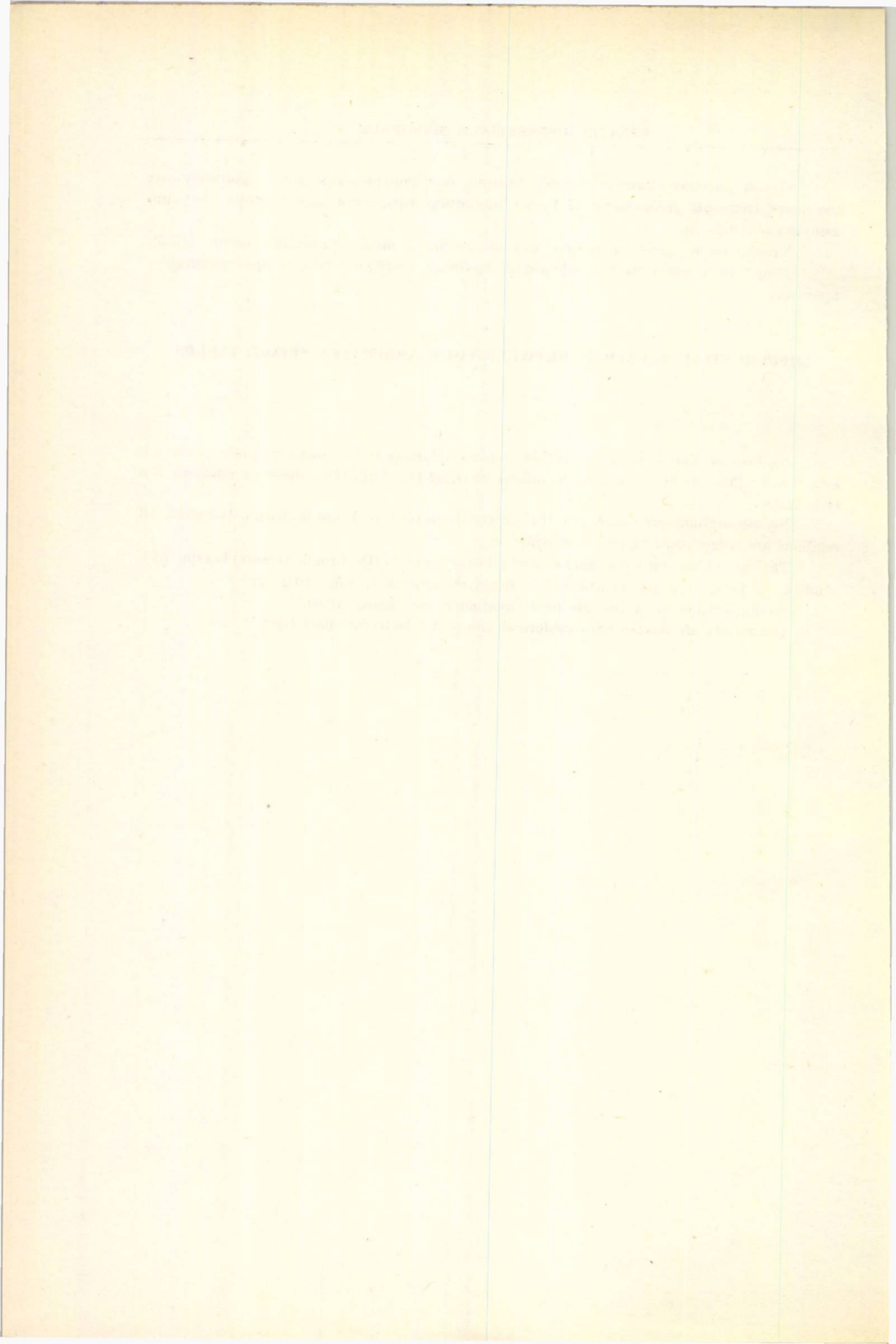
On base of matrix identities [2] differential relations for 4 arbitrary spinor fields are established: (5.2—3) or (5.6) (with notations (4.1), (2.1), (4.2)). The algebraic relations are (4.7) [2,4] .

No assumptions are made but the anticommutativity of Dirac matrices, therefore all relations are independent of any field equation.

The case of bilinear covariants of two arbitrary spinors (De Broglie tensors) is especially studied: (7.1—4); e.g. the identities for energy-momentum tensors (10.2—3).

An implication for a possible field equation is mentioned (10.6).

The results are related with conformal group of relativistic space-time.



CLASE DE ACOPERIRI RIEMANNIENE, II *

CABIRIA ANDREIAN CAZACU

CAPITOLUL IV

TEORIA RAMIFICĂRII

§ 1. Ramificarea acoperirilor poliedrale

4.1. În acest capitol vom studia acoperirile riemanniene de clasă P din punct de vedere al ramificării. Se știe că rezultatele fundamentale ale lui R. Nevanlinna relative la indicele de ramificare și numărul maxim de valori complet ramificate ale funcțiilor meromorfe în plan sau într-un cerc au fost interpretate geometric prin studiul ramificării acoperirilor riemanniene generate de aceste funcții. Prin metode metrico-topologice sau pur topologice, L. V. Ahlfors [3] și S. Stoilow [5] — [6], au obținut pentru importante clase de acoperiri riemanniene o teoremă a discurilor, care limita superior numărul discurilor sau domeniilor jordaniene din suprafața de bază, neacoperite complet de nici o foaie simplă. În acest sens discul complet ramificat constituie o generalizare a noțiunii de valoare complet ramificată a unei funcții analitice $f(z)$ (valoare pentru care ecuația $f(z) = a$ admite numai rădăcini multiple) și se reduce la aceasta prin restrângere la un punct. Treptat cercetarea a cuprins clase tot mai largi de acoperiri riemanniene ¹, iar rezultatele obținute au permis o cunoaștere mai profundă a modului de acoperire și au adus contribuții în alte probleme importante, ca de exemplu aceea a tipului.

Pentru a obține o teoremă a discurilor generală, valabilă în cazul acoperirilor de clasă P , vom studia în acest paragraf ramificarea acoperirilor poliedrale, care intervin la fiecare etapă a exhaustiunii.

4.2. Fie deci S_T^0 o acoperire P , unde presupunem V o suprafață bordată compactă cu ordinul de conexiune c în frontiera Γ , formată din μ curbe jordaniene și proiectată prin T pe curbele γ , cu proprietățile indicate la nr. 1.4, care descompun S în domenii D_j de conexiune c_j . Presupunem alese pe γ circuitele γ' , astfel încît $\partial \cap \gamma' = 0$. Mulțimile $E_{\gamma'}$

* Memoriul acesta constituie partea a doua a lucrării cu același titlu, publicată în numărul precedent al revistei. Numerotarea capitolelor continuă pe aceea din partea întâia, care cuprinde și bibliografia [1] — [37]. (De exemplu 1.4 înseamnă punctul 1.4 din cap. I, (1.3) formula cu acest număr din cap. I).

² A se vedea de ex. [17], II, § 2; [38] — [40] și [19], [21], [23], — [25], [31].

și $(E \cup \mathcal{U}) - \gamma'$ descompun γ' respectiv $\gamma - \gamma'$ în transversale γ'' . Notînd cu n_j , x_a și y_b numărul foilor acoperirii S_T^0 peste D_j , γ''_a — transversală din γ'' — respectiv $p_b \in E_{\gamma'} \cup [(E \cup \mathcal{U}) - \gamma']$, formula (1.3) pe care am stabilit-o în cap. I, § 2, ne dă pentru ordinul total de ramificare al acoperirii¹.

$$r = (c - 2) + \sum_{D_j} n_j (2 - c_j) - \sum_{\gamma''_a} x_a + \sum_{p_b} y_b \quad (4.1)$$

Vom cerceta următoarele trei tipuri de domenii jordaniene deschise Δ complet ramificate, situate în $T(V)^0$ și disjuncte două cîte două:

1. Δ'_s ($s = 1, \dots, h'$), fiecare Δ'_s fiind inclus într-un D_j .
2. Δ''_t ($t = 1, \dots, h''$), fiecare Δ''_t conținînd cel puțin o componentă conexă a mulțimii γ și avînd frontiera în $S - \gamma$.
3. Δ'''_u ($u = 1, \dots, h'''$), frontiera fiecărui Δ'''_u intersectînd mulțimea γ într-un număr finit de puncte².

Ținînd seama că Δ'_s , Δ''_t și Δ'''_u au fost presupuse complet ramificate, dar că ramificarea acoperirii peste ele este cel mult egală cu r , vom stabili o inegalitate relativă la numărul acestor domenii (4.10).

1. Fie δ'_m o regiune maximă a lui Δ'_s . Acoperirea $\Delta'^{\delta'_m}_{sT}$ fiind totală, formula lui Hurwitz, (1.1), ne dă

$$r'_m = n'_m + c'_m - 2,$$

dacă notăm cu c'_m ordinul de conexiune a lui δ'_m , cu n'_m numărul foilor și cu r'_m ordinul total de ramificare al acestei acoperiri. Ipoteza că Δ'_s este complet ramificat implică $n'_m \geq 2$, iar faptul că este un domeniu jordanian, $c'_m \geq 1$. Sumăm pentru toate domeniile δ'_m de pe Δ'_s inegalitatea $r'_m \geq n'_m - 1$, ținînd seama că $\sum n'_m = n_j$ dacă $\Delta'_s \subset D_j$, iar numărul domeniilor δ'_m de pe Δ'_s este $\leq \frac{n_j}{2}$. Sumînd apoi pentru toate domeniile $\Delta'_s \subset D_j$, al căror număr fie h'_j , și pentru toate domeniile D_j , obținem suma ordinelor punctelor de ramificare proiectate peste $\cup \Delta'_s$:

$$\sum r'_m \geq \frac{1}{2} \sum n_j h'_j \quad (4.2)$$

¹ În formulă intervin efectiv numai D_j , γ''_a , $p_b \in T(V)^0$

² Această condiție este îndeplinită luînd curbele γ și frontierele domeniilor Δ formate dintr-un număr finit de arce analitice. Aceleași rezultate se obțin dacă permitem ca fr. Δ'_s sau fr. Δ''_t să coincidă cu o curbă γ . În ultimul caz, domeniul D_{j_2} (pe care îl definim mai jos) va fi domeniul D_j , care intersectează Δ''_t și pentru care fr. $D_{j_2} \supset$ fr. Δ''_t . De asemenea se poate admite că fr. $\Delta'''_u \cap \gamma$ este formată dintr-un număr finit de arce și de puncte, evident diferită de un γ'_h fără puncte excepționale deoarece atunci sîntem în cazul Δ'_t .

2. Fie acum δ_i'' o regiune maximă a lui Δ_i'' , c_i'' ordinul de conexiune a lui δ_i'' și r_i'' ordinul total de ramificare al acoperirii Δ_i'' , care în acest caz este poliedrală.

Aplicînd formula (1.3), obținem

$$r_i'' = c_i'' - 2 + \sum_{D_j \subset \Delta_i''} n_{ji}'' (2 - c_j) + n_{it}'' (1 - m_t) - \sum_{\gamma_a'' \subset \Delta_i''} x_{at} + \sum_{p_b \in \Delta_i''} y_{bt}$$

unde n_{ji}'' este numărul foilor lui δ_i'' peste domeniul $D_j \subset \Delta_i''$, D_{it} domeniul D_j care conține fr Δ_i'' , iar m_t numărul componentelor fr. D_{it} din Δ_i'' , n_{it}'' , x_{at} și y_{bt} — numărul foilor lui δ_i'' peste $\Delta_i'' \cap D_{it}$, γ_a'' și p_b .

Ținînd seama că pentru $c_i'' = 1$, avem $n_{it}'' \geq 2$ și în cazul contrar, $c_i'' \geq 2$, vom suma din nou pentru toți δ_i'' corespunzători unui Δ_i'' , și apoi pentru toți Δ_i'' . Deducem astfel pentru suma ordinelor punctelor de ramificare proiectate în domeniile Δ_i'' :

$$\sum r_i'' \geq \sum_1 n_i (2 - c_i) + \sum_2 n_i \left(\frac{h_i''}{2} - \mu_i'' \right) - \sum_1 x_a + \sum_1 y_b \quad (4.3)$$

unde Σ_1 se referă la domenii D_j , transversale γ_a'' respectiv puncte p_b din $\bigcup \Delta_i''$, iar Σ_2 la domeniile D_j , care includ $\bigcup$ fr Δ_i'' ; h_i'' reprezintă numărul domeniilor Δ_i'' pentru care $D_j \supset$ fr Δ_i'' și $\mu_i'' = \sum m_t$ pentru aceiași indici t , adică μ_i'' este numărul componentelor din fr D_j incluse în $\bigcup \Delta_i''$. Evident, $h_i'' \leq \mu_i''$.

În calculul de mai sus, termenul $c_i'' - 2$ a fost înlocuit cu -1 respectiv 0 , după cum $c_i'' = 1$ respectiv ≥ 2 , iar numărul domeniilor δ_i'' pentru care $c_i'' = 1$ a fost majorat cu $\frac{1}{2} \sum n_i h_i''$.

3. Fie δ_u''' o regiune maximă corespunzătoare unui Δ_u''' . Vom nota pentru fiecare D_j , pentru care $\overline{D_j}$ intersectează fr. Δ_u''' cu Δ_{ujp}''' componentele conexe ale lui $D_j \cap \Delta_u'''$ ¹ și cu c_{ujp}''' ordinul de conexiune a lui Δ_{ujp}''' . Domeniul Δ_u''' este descompus în domeniile Δ_{ujp}''' și eventuale domenii D_j prin γ .

Aplicăm acoperirii Δ_u''' formula (1.3), păstrînd aceleași γ' alese la început. Punctele de intersecție ale fr. Δ_u''' cu γ devin excepționale, dar ele nu vor aduce nici o contribuție în calcul, deoarece nu sînt acoperite; în formulă vor interveni numai punctele p_b deja considerate, care sînt incluse în Δ_u''' . Circuitele γ_h' din Δ_u''' nedescompuse în transversale pentru acoperirea S_T^0 (adică avînd $E_{\gamma_h'} = 0$) și transversalele γ_a'' din Δ_u''' rămîn neschimbate. Vom nota cu γ_3 reuniunea lor pentru toate domeniile Δ_u''' . Orice circuite γ_h' cu $E_{\gamma_h'} = 0$, care intersectează atît Δ_u''' cît și fr. Δ_u''' , și orice transversală γ_a'' , care intersectează de asemeni atît Δ_u''' cît și

¹ Desigur în cazul cînd $D_j - \Delta_u'''$ este conex, indicele p nu mai este necesar.

fr. Δ_u''' , și orice transversală γ_a'' care intersectează de asemeni atît Δ_u''' cît și fr. Δ_u''' dau naștere la una sau mai multe transversale $\tilde{\gamma}_a$. Un γ_h' generează transversale cu ambele extremități pe fr. Δ_u''' și separînd domenii Δ_{ujp}''' distincte; un γ_a'' poate genera și cel mult două transversale cu o singură extremitate pe fr. Δ_u''' și ele pot fi situate pe frontiera unui singur Δ_{ujp}''' . Vom pune în corespondență biunivocă γ_a'' cu una din transversalele γ formate prin intersecția ei cu $\cup$ fr. Δ_u''' , aleasă în mod convenabil, pe care o vom nota tot cu γ_a'' și o vom numi *asociată*, iar pe celelalte transversale $\tilde{\gamma}$ de pe γ_h' și γ_a'' le vom nota γ_a^* sau γ_a^{**} . Alegerea transversalei care va fi pusă în corespondență cu un γ_a'' cît și gruparea celorlalte transversale în clase γ^* și γ^{**} va fi expusă la nr. 4.3, deoarece o vom folosi la evaluarea unor termeni¹. Conform (1.3), putem scrie

$$r_v''' = c_v''' - 2 + \sum_{\Delta_{ujp}'''} n_{ujpv}''' (2 - c_{ujp}''') + \sum_{D_j \subset \Delta_u'''} n_{jv}''' (2 - c_j) - \sum_{\gamma_a'' \subset \Delta_u'''} x_{av} - \\ - \sum_{\gamma_a^* \subset \Delta_u'''} x_{av}^* - \sum_{\gamma_a^{**} \subset \Delta_u'''} x_{av}^{**} + \sum_{p_b \in \Delta_u'''} y_b,$$

unde r_v''' este ramificarea acoperirii, c_v''' ordinul de conexiune a lui δ_v''' , iar n_{ujpv}''' , n_{jv}''' , x_{av} , x_{av}^* , x_{av}^{**} și y_b numărul foilor lui δ_v''' peste Δ_{ujp}''' , D_j , γ_a'' , γ_a^* , γ_a^{**} respectiv p_b .

Vom înlocui din nou $c_v''' - 2$ cu -1 respectiv 0 ca mai sus și vom suma în raport cu domeniile maxime δ_v''' de pe un Δ_u''' și apoi în raport cu Δ_u''' . Obținem astfel

$$\sum r_v''' \geq \sum_3 n_j (2 - c_j) + \sum_4 n_j (h_j''' - \mu_j''') - N - \sum_3 x_a - \\ - \sum x_a^* - \sum x_a^{**} + \sum_3 y_b \quad (4.4)$$

unde Σ_3 se referă la domenii D_j , transversale γ_a'' (existente inițial sau noi asociate), puncte p_b din $\cup \Delta_u'''$, Σ_4 la domenii D_j care intersectează fr. $\cup \Delta_u'''$, h_j''' este numărul de domenii Δ_{ujp}''' din acești D_j , μ_j''' este numărul componentelor din frontiera acestor D_j incluse în $\cup \Delta_u'''$ și N este numărul domeniilor δ_v''' cu $c_v''' = 1$.

Spre deosebire de cazurile 1 și 2, o inegalitate de forma $N \leq \frac{1}{2} \sum_4 n_j h_j'''$ nu mai este totdeauna adevărată, după cum rezultă dintr-un exemplu (de acoperire chiar parțial regulată), pe care l-am dezvoltat în lucrarea [31] p. 129 și pe care îl vom numerota E_7 . Același exemplu arată că nu există întotdeauna o limitare superioară pentru h_j''' și h''' . Notînd N_1 numărul domeniilor δ_v''' simplu conexe pentru care $n_{ujpv}''' \leq 1$

¹ Transversalele γ^* vor putea fi puse în corespondență biunivocă cu domenii Δ_{ujp}''' , spre deosebire de γ^{**} . Evident în relația ce urmează

$$\sum_{\gamma_a'' \subset \Delta_u'''} x_{av} + \sum_{\gamma_a^* \subset \Delta_u'''} x_{av}^* + \sum_{\gamma_a^{**} \subset \Delta_u'''} x_{av}^{**} = \sum_{\tilde{\gamma}_a \subset \Delta_u'''} \tilde{x}_{av} + \sum_{\gamma_a'' \subset \gamma_3 \cap \Delta_u'''} x_{av}$$

și $n_{j_0}''' \leq 1$ și $N_2 = N - N_1$, obținem numai inegalitatea :

$$N_1 + 2N_2 \leq \sum_i n_i h_i''' . \quad (4.5)$$

4.3. Analiza transversalelor noi ne va permite să stabilim însă o evaluare superioară a termenului N .

Am remarcat la nr. 4.2 că un circuit γ'_h cu $E_{\gamma'_h} = 0$ poate da naștere numai la transversale noi cu ambele extremități pe $\cup$ fr. Δ_u''' (distincte sau confundate), în timp ce o transversală γ_a'' inițială poate genera și transversale noi, care au o singură extremitate pe $\cup$ fr. Δ_u''' iar cealaltă în $\cup \Delta_u'''$, și anume : 0,1 sau 2 astfel de transversale după cum are 0,1 sau 2 extremități în $\cup \Delta_u'''$. Vom spune că γ_a'' are în $\cup \Delta_u'''$ o extremitate de specia I respectiv II, după cum transversala adiacentă la acea extremitate, obținută pe γ_a'' prin considerarea intersecțiilor cu fr. $\cup \Delta_u'''$ este pe frontiera unui singur Δ_{ujp}''' sau pe frontiera a două domenii Δ_{ujp}''' diferite. Dacă γ_a'' nu are extremitățile în $\cup \Delta_u'''$, îi asociem una oarecare din transversalele noi, pe care le determină. Dacă γ_a'' are o extremitate în $\cup \Delta_u'''$, îi asociem transversala nouă, care duce la acea extremitate. Dacă γ_a'' are două extremități în $\cup \Delta_u'''$, îi vom asocia una din cele două transversale noi cu câte o extremitate în $\cup \Delta_u'''$, iar pe cealaltă o vom numi *liberă*. Atunci cînd γ_a'' are o extremitate de specia I, convenim să-i asociem transversala nouă cu aceeași proprietate, iar cînd are două extremități de specia I, să-i asociem una arbitrară dar fixată dintre transversalele noi cu aceste extremități, cealaltă fiind considerată drept liberă. Dacă γ_a'' are două extremități de specia II, alegerea transversalei asociate și a celei libere se va efectua treptat în cele ce urmează.

Vom începe acum o clasificare a transversalelor în ordinea crescătoare a indicelui u . Iată procedeul pentru Δ_u''' .

1. Considerăm toate transversalele noi din Δ_u''' , care au ambele extremități pe fr. Δ_u''' ; unele dintre ele pot fi asociate, pe celelalte le grupăm în clasa γ^* . Ele descompun Δ_u''' în domenii simplu conexe. Aplicînd metoda lui L. V. Ahlfors [3] stabilim următoarea clasificare a acestor domenii — respectiv transversale.

Clasa 1 cuprinde *domeniile* simplu conexe delimitate de câte o unică transversală, pe care le notăm Δ_i^1 , și *transversalele* corespunzătoare γ_i^1 .

Clasa λ cuprinde *domeniile* delimitate de o singură transversală, care nu aparține claselor anterioare, domenii notate Δ_i^λ , și aceste transversale, notate γ_i^λ ($\lambda = 2, \dots, \Lambda - 1$).

După un număr finit de etape, fie $\Lambda - 1$, vom obține un domeniu Δ_1^Λ pe a cărui frontieră se găsesc numai transversale de clase $\leq \Lambda - 1$ (cazul 1°) sau două domenii limitate de o transversală de clasă Λ (cazul 2°). În cazul 2, asociem unul din cele două domenii cu unica transversală de clasă Λ și le notăm Δ_1^Λ respectiv γ_1^Λ , iar domeniul rămas îl notăm $\Delta_1^{\Lambda+1}$. În ambele cazuri, se stabilește o corespondență biunivocă între domenii și transversale exceptînd un ultim domeniu $\Delta_1^{\Lambda+1}$, unde $\Lambda_1 = \Lambda - 1$ (cazul 1°) respectiv Λ (cazul 2°).

Introducem în mulțimea Δ_i^λ ordonarea parțială : Δ_i^λ este de rang mai înalt decît Δ_j^μ , dacă $\lambda > \mu$. Prin clasificarea de mai sus, ori de câte

ori ieșim din Δ_i^λ , $\lambda \leq \Lambda_1$ străbătind γ_i^λ intrăm într-un domeniu Δ_j^μ de rang mai înalt: $\lambda \leq \mu$.

2. Considerăm toate transversalele asociate în mod determinat γ_a'' , care au intervenit la punctul 1): transversale care provin dintr-un γ_a'' vechi (anterior considerării domeniilor Δ_u''' cu o singură extremitate în $\cup \Delta_u'''$ sau cu o singură extremitate de specia I în $\cup \Delta_u'''$ și transversale noi, asociate în virtutea clasificării pentru domenii Δ_v''' , $v < u$. De asemenea considerăm și transversalele libere cu extremități de specia I, pe care le grupăm în clasa γ^{**1} . Racordăm la nodurile — extremități din Δ_u''' ale tuturor acestor transversale — componentele conexe din γ_3 , care le conțin, și grupăm toate transversalele noi, care duc la ele, în γ^* și $\gamma_a''^1$. Pentru fiecare componentă din γ_3 considerată alegem una din transversalele asociate sau γ^{**1} , care o determină și extragem din $\Delta_{i_1}^{\lambda_1}$ aceste transversale și componentele resective. Se formează atunci un domeniu simplu conex $\tilde{\Delta}_{i_1}^{\lambda_1}$ adiacent la fr. Δ_u''' .

Toate celelalte transversale 2) (asociate sau γ^*) sînt transversale obișnuite în $\tilde{\Delta}_{i_1}^{\lambda_1}$ și îl descompun în domenii simplu conexe, cu care le punem în corespondență după procedeul 1) modificat așa încît $\gamma_{i_1 i_2}^{\lambda_1 \lambda_2}$ corespunzătoare lui $\Delta_{i_1 i_2}^{\lambda_1 \lambda_2}$, $\lambda_2 = 1, \dots, \Lambda_{i_1}^{\lambda_1}$, îl separă de un $\Delta_{i_1 i_2}^{\lambda_1 \mu_2}$ de rang mai înalt $\lambda_2 < \mu_2$, iar ultimul domeniu rămas $\Delta_{i_1 i_2}^{\lambda_1 \Lambda_{i_1}^{\lambda_1} + 1}$ e adiacent la $\gamma_{i_1}^{\lambda_1}$, dacă $\lambda_1 \leq \Lambda_1$.

Într-adevăr, fie $\lambda_1 \leq \Lambda_1$; procedeul 1) stabilește o corespondență biunivocă între $\gamma_{i_1 i_2}^{\lambda_1 \lambda_2}$ și $\Delta_{i_1 i_2}^{\lambda_1 \lambda_2}$ cu $\lambda_2 = 1, \dots, L^2$, și determină un ultim domeniu $\Delta_{i_1 i_2}^{\lambda_1 L+1}$. Dacă acesta nu este adiacent la $\gamma_{i_1 i_2}^{\lambda_1 3}$, atunci pe frontiera sa există cel puțin o transversală $\gamma_{i_1 i_2}^{\lambda_1 \lambda_2^1}$ cu λ_2^1 minim, care îl separă de $\gamma_{i_1}^{\lambda_1}$. Schimbăm notația lui $\Delta_{i_1 i_2}^{\lambda_1 \lambda_2^1}$ în $\Delta_{i_1 i_2}^{\lambda_1 L+2}$ și a lui $\gamma_{i_1 i_2}^{\lambda_1 \lambda_2^1}$ în $\gamma_{i_1 i_2}^{\lambda_1 L+1}$ și *asociem* $\Delta_{i_1 i_2}^{\lambda_1 L+1}$ cu $\gamma_{i_1 i_2}^{\lambda_1 L+1}$. Dacă $\Delta_{i_1 i_2}^{\lambda_1 L+2}$ nu este adiacent la $\gamma_{i_1 i_2}^{\lambda_1}$, repetăm procedeul: există atunci cel puțin o transversală $\gamma_{i_1 i_2}^{\lambda_1 \lambda_2^2}$, cu λ_2^2 minim, care separă $\Delta_{i_1 i_2}^{\lambda_1 L+2}$ de $\gamma_{i_1 i_2}^{\lambda_1}$. Evident $\lambda_2^2 < \lambda_2^1$. Punem $\Delta_{i_1 i_2}^{\lambda_1 L+3}$ în loc de $\Delta_{i_1 i_2}^{\lambda_1 \lambda_2^2}$ și $\gamma_{i_1 i_2}^{\lambda_1 L+2}$ în loc de $\gamma_{i_1 i_2}^{\lambda_1 \lambda_2^2}$. Facem să corespundă $\gamma_{i_1 i_2}^{\lambda_1 L+2}$ la $\Delta_{i_1 i_2}^{\lambda_1 L+2}$. Continu-

¹ Evident aceste transversale pot avea pe componentele considerate ale lui γ_3 numai extremități de specia II. Unele dintre ele puteau fi libere, pe baza clasificării anterioare. Celelalte vor fi numite libere sau asociate în modul următor: dacă printre ele se găsesc ambele transversale noi ce ar proveni din același γ_a'' vechi, cu două extremități de specia II, una din transversale va fi numită liberă, cealaltă asociată; în cazul contrar transversala va fi numită liberă (iar cealaltă transversala nouă de pe același γ_a'' vechi — asociată; ea va interveni în etapa următoare). Toate transversalele acestea care duc la componentele γ_3 considerate aci vor fi grupate în γ^* resp. γ_a'' după cum sînt libere sau asociate.

² Pentru simplificarea notației scriem L în loc de $L_{i_1}^{\lambda_1}$.

³ În cazul contrar, $L = \Lambda_{i_1}^{\lambda_1}$ de mai jos.

înd, după un număr finit de etape, ajungem la $\Delta_{i_1}^{\lambda_1 \Lambda_1+1}$ adiacent la $\gamma_{i_1}^{\lambda_1}$, pe care îl asociem cu $\gamma_{i_1}^{\lambda_1} = \gamma_{i_1}^{\lambda_1 \Lambda_1+1}$.

Pentru $\lambda_1 = \Lambda_1 + 1$, aplicăm numai procedeul 1). Singurul $\Delta_{i_1}^{\lambda_1 \Lambda_1+1}$, care rămîne fără transversală corespunzătoare este $\Delta_{i_1}^{\Lambda_1+1}$.

Dacă $\Delta_{i_1}^{\lambda_1}$ nu conține transversale 2) vom scrie $\Delta_{i_1}^{\lambda_1+1} = \Delta_{i_1}^{\lambda_1}$, $\gamma_{i_1}^{\lambda_1+1} = \gamma_{i_1}^{\lambda_1}$.

Introducem în mulțimea $\Delta_{i_1}^{\lambda_1 \Lambda_1+1}$ relația de ordine: $\Delta_{i_1}^{\lambda_1 \Lambda_1+1}$ este de rang mai înalt decît $\Delta_{i_1}^{\mu_1 \Lambda_1+1}$ dacă $\lambda_1 > \mu_1$ sau dacă $\lambda_1 = \mu_1$ dar $\lambda_2 > \mu_2$. Corespondența stabilită între $\Delta_{i_1}^{\lambda_1 \Lambda_1+1}$ și $\gamma_{i_1}^{\lambda_1 \Lambda_1+1}$ are proprietatea: din orice $\Delta_{i_1}^{\lambda_1 \Lambda_1+1}$, străbătînd $\gamma_{i_1}^{\lambda_1 \Lambda_1+1}$ trecem într-un domeniu de rang mai înalt.

3. Considerăm toate transversalele asociate celor libere de la punctul 2) și repetăm procedeul 2): racordăm componente din γ_3 , luăm transversale noi corespunzătoare, le clasificăm, etc.

La etapa $A - 1$) procesul se termină.

A) Considerăm componentele rămase din γ_3 , care conțin ambele extremități (de specia II-a) ale unei aceleași transversale inițiale. Una arbitrară din cele două transversale noi, adiacente extremităților, fi numită asociată, iar cealaltă liberă și grupată în γ^* . Reîncepem procedeul 2) care se încheie la etapa $B - 1$).

B) Considerăm una din componentele conexe rămase din γ_3 , cuprînd o extremitate de transversală despre care nu este încă determinat dacă este asociată sau liberă. O alegem, ca asociată și începem un nou ciclu cu procedeul 2). După operația $C - 1$) și acest proces nu mai continuă.

C) Considerăm componentele conexe rămase din γ_3 , la care se termină o transversală liberă. Grupăm în clasa γ^{**2} cîte o transversală de acest fel, pentru fiecare componentă și aplicăm procedeul 2) celelalte transversale libere fiind incluse în γ^* . În acest moment clasificarea transversalelor noi se încheie. Dacă au mai rămas componente conexe în γ_3 , la ele nu mai ajung transversale noi și considerarea lor nu determină noi domenii $\Delta_{i_1 \dots i_C}^{\lambda_1 \dots \lambda_C}$ ci le transformă eventual în domenii cu ordin de conexiune mărită $\widetilde{\Delta}_{i_1 \dots i_C}^{\lambda_1 \dots \lambda_C 1}$.

În concluzie, am stabilit o corespondență biunivocă între transversalele: γ^* și o parte din γ_a'' , clasificate $\gamma_{i_1 \dots i_C}^{\lambda_1 \dots \lambda_C}$ și domeniile $\Delta_{u'jp}'''$ clasificate $\widetilde{\Delta}_{i_1 \dots i_C}^{\lambda_1 \dots \lambda_C}$ și a rămas un domeniu, pe care îl notăm simplu Δ_a .

Cu ordonarea: $\widetilde{\Delta}_{i_1 \dots i_C}^{\lambda_1 \dots \lambda_C}$ este de rang mai înalt decît $\widetilde{\Delta}_{i_1 \dots i_C}^{\mu_1 \dots \mu_C}$, dacă n fiind primul indice cu $\lambda_n \neq \mu_n$ ($n \geq 1$), avem $\lambda_n > \mu_n$. Numerotarea s-a efectuat astfel încît din $\widetilde{\Delta}_{i_1 \dots i_C}^{\lambda_1 \dots \lambda_C}$ trecem prin $\gamma_{i_1 \dots i_C}^{\lambda_1 \dots \lambda_C}$ într-un domeniu de rang mai înalt.

Transversalele $\gamma^{**} = \gamma^{**1} \cup \gamma^{**2}$ pot fi oricît de multe, dar nu sînt în corespondență cu domenii $\Delta_{u'jp}'''$ (ci eventual cu γ_a'' inițiale, avînd 2 extremități de specia I și cu anumite componente din γ_3 , deci cu alte γ_a'') după cum arată exemplul următor:

E_8 . Fie Δ''' un domeniu Jordan pe sfera S , iar γ o mulțime formată din $A_1 + A_2$ componente conexe:

¹ În diverse cazuri, unele din etapele descrise mai sus pot lipsi.

1. A_1 arce simple deschise cu extremități în Δ''' , astfel încît intersecția fiecăruia cu fr. Δ''' constă din 2 puncte și îl descompune în 3 subarce: două cuprinse în Δ''' cu câte o extremitate pe fr. Δ''' și unul în ext. Δ''' cu două extremități pe fr. Δ''' .

2. A_2 componente conexe formate fiecare dintr-o curbă Jordan inclusă în Δ''' și două arce Jordan cu câte o extremitate pe curbă și cealaltă în Δ''' , descompuse ca mai sus de fr. Δ''' în 3 subarce: două în Δ''' cu câte o extremitate pe fr. Δ''' și unul în ext. Δ''' cu ambele extremități pe fr. Δ''' .

Fie p și q două puncte din ext. $\Delta''' - \gamma$ și S_T^* o acoperire a lui S cu 2 foi de sferă, unite în p și q prin ramificări de ordinul întâi și astfel încît de pe una dintre foi s-au scos cele A_1 arce simple din γ , iar de pe foaia rămasă, cele A_2 componente conexe ale lui γ împreună cu interioarele curbelor Jordan respective. S_T^* formează o acoperire poliedrală a lui S relativ la γ , pe care distingem inițial $A_1 + 4 A_2$ transversale γ_a'' . Domeniul Δ''' nu este acoperit de nici o foaie simplă. Luîndu-l drept domeniu complet ramificat după clasificarea precedentă, γ^{**1} cuprinde A_1 transversale noi libere, γ_3 cuprinde A_2 componente conexe, (cele A_2 curbe Jordan) iar γ^{**2} cuprinde A_2 transversale noi libere. Avem A_2 domenii D_j din Σ_3 (interioarele curbelor Jordan) și $A_2 + 1$ domenii Δ_{uip}''' (u și j au o singură valoare) în corespondență cu A_2 transversale noi libere γ^* .

4.4. Pe baza analizei din punctul precedent, vom evalua acum superior nu numai termenul N ci $N + \sum x_a^*$.

Într-adevăr, fie N_u numărul domeniilor δ_v''' cu $c_v''' = 1$, corespunzătoare unui Δ_u''' . Dintre acestea N_u^* se termină la transversale $\gamma_{i_1 \dots i_C}^{\lambda_1 \dots \lambda_C}$ din γ^* după ce acopere cu cel puțin o foaie $\widetilde{\Delta}_{i_1 \dots i_C}^{\lambda_1 \dots \lambda_C}$ corespunzător. Fie γ_a^* transversala $\gamma_{i_1 \dots i_C}^{\lambda_1 \dots \lambda_C}$, Δ_{uip}''' domeniul $\widetilde{\Delta}_{i_1 \dots i_C}^{\lambda_1 \dots \lambda_C}$ și N_{uip}^* numărul domeniilor δ_v''' cu proprietatea menționată relativ la Δ_{uip}''' . Pentru fiecare γ_a^* putem scrie inegalitatea

$$N_{uip}^* + x_a^* \leq n_j,$$

astfel încît sumînd relativ la γ_a^* , obținem

$$N_u^* + \sum x_a^* \leq \sum^* n_j \quad (4.6)$$

unde $\sum^*$ se referă la domeniile Δ_{uip}''' asociate cu γ^* a căror mulțime o vom nota cu $\mathcal{M}_u^*$. Alte domenii δ_v''' , în număr de N_u^T acopăr total Δ_u''' și dacă n_u''' este numărul foilor lui V complete peste Δ_u''' , putem scrie

$$N_u^T \leq \frac{n_u'''}{2}. \quad (4.7)$$

Însfîrșit, celorlalte N_u^I domenii δ_v''' , care acopăr cu cel puțin o foaie incompletă Δ_u''' , le pot fi asociate anumite $\Delta_{uip}''' \notin \mathcal{M}_u^*$, și anume pentru fiecare δ_v''' din această categorie, există cel puțin un domeniu $\widetilde{\Delta}_{i_1 \dots i_C}^{\lambda_1 \dots \lambda_C}$ de rang maxim la frontiera căruia o foaie din δ_v''' se termină¹. Acest

¹ δ_v''' nu poate acoperi numai domenii D_j din Σ_3 , formula (4.4), deoarece $\Delta_u''' \subset T(V)$.

$\widetilde{\Delta}_{i_1 \dots i_C}^{\lambda_1 \dots \lambda_C} \in \mathfrak{M}_u^*$, deoarece dacă $\widetilde{\Delta}_{i_1 \dots i_C}^{\lambda_1 \dots \lambda_C} \neq \Delta_u^0$, δ_v''' se termină la $\gamma_{i_1 \dots i_C}^{\lambda_1 \dots \lambda_C}$, căci în cazul contrar s-ar prelungi peste un $\Delta_{i_1 \dots i_C}^{\mu_1 \dots \mu_C}$ de rang mai înalt. Fie $\mathfrak{M}_u^I$ mulțimea Δ_{ujp}''' pusă astfel în corespondență cu cele N_u^I domenii δ_v''' și N_{ujp}^I numărul domeniilor δ_v''' ce corespund lui Δ_{ujp}''' . Pentru fiecare putem scrie

$$n_u''' + N_{ujp}^I \leq n_j,$$

și sumînd relativ $\Delta_{ujp}''' \in \mathfrak{M}_u^I$,

$$n_u''' \sum_j h_{juI}''' + N_u^I \leq \sum_j n_j h_{juI}''', \quad (4.8)$$

unde h_{juI}''' este numărul $\Delta_{ujp}''' \in \mathfrak{M}_u^I$. Fie de asemeni h_{ju*}''' numărul $\Delta_{ujp}''' \in \mathfrak{M}_u^*$ iar h_{juR}''' numărul celorlalte Δ_{ujp}''' :

$$h_{ju*}''' + h_{juI}''' + h_{juR}''' = h_{ju}''',$$

h_{ju}''' fiind numărul Δ_{ujp}''' . Sumăm (4.6) – (4.8), ținînd seama că

$$N_u = N_u^* + N_u^I + N_u^T,$$

și apoi, adunînd inegalitățile astfel obținute pentru toți Δ_u''' , deducem *evaluarea*

$$\begin{aligned} R_0 &= N + \sum_a x_a^* - \sum_j n_j h_j''' \leq \\ &\leq - \sum_{j,u} n_j h_{juR}''' + \sum_u n_u''' \left(\frac{1}{2} - \sum_j h_{juI}''' \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

4.5. Termenului $N = \sum N_u$ i se pot da și alte evaluări mai puțin exacte, dar mai simple. Din nou vom scrie (4.7) dar $n_u''' \leq \min_{D_j \cap \Delta_u''' \neq \emptyset} n_j$,

deci

$$\sum_u N_u^T \leq \frac{h''' }{2} n^*, \quad n^* = \max_u \left(\min_{D_j \cap \Delta_u''' \neq \emptyset} n_j \right)$$

Pe de altă parte $N_u - N_u^T$ e cel mult egal cu numărul foilor incomplete de pe Δ_u''' , care se termină la diverse transversale noi $\tilde{\gamma}$ (γ_a'' , γ^* , sau γ^{**} de la 4.3)

$$\sum_u (N_u - N_u^T) \leq \max_4 n_j \cdot \tilde{N}(\tilde{\gamma}) - \sum \tilde{x}_a,$$

unde $\tilde{N}(\tilde{\gamma})$ reprezintă numărul $\tilde{\gamma}_a$ socotite cu multiplicitatea 2 sau 1, după cum pe $\tilde{\gamma}_a$ se termină foi din ambele părți sau numai dintr-o singură parte și $\sum$ este formată în același mod. Prin urmare

$$N \leq \frac{h''' }{2} n^* + \max_4 n_j \cdot \tilde{N}(\tilde{\gamma}) - \sum \tilde{x}_a \quad (4.9')$$

și dacă la fiecare $\tilde{\gamma}_a$ se termină foi numai dintr-o singură parte, (așa cum se întâmplă în cazul acoperirilor din propoziția T_3 , cap. III, 3.5).

$$N \leq \frac{h'''}{2} n^* + \max_4 n_j \cdot N(\tilde{\gamma}) - \sum \tilde{x}_a. \quad (4.9'')$$

Un exemplu pe care l-am dezvoltat în lucrarea [31] p. 130 și îl vom numera E_9 , arată că evaluările (4.9') și (4.9'') sînt exacte.

4.6. Din relațiile (4.1) – (4.4) deducem următoarea *inegalitate fundamentală*

$$(c - 2) + \sum_5 n_j \left(2 - c_j^* - \frac{h'_j + h''_j}{2} \right) + R \geq 0 \quad (4.10)$$

unde Σ_5 este extinsă la toate domeniile D_j care nu intră în Σ_1 sau Σ_3 (pentru care $D_j \not\subset (\cup \Delta'_i) \cup (\cup \Delta''_u)$),

$$c_j^* = c_j - \mu_j'' - \mu_j'''^1,$$

$R = R_1 + R_0 = -\Sigma_5 x_a + \Sigma_5 y_b + \Sigma x_a^{**} + N + \Sigma x_a^* - \Sigma n_j h_j'''$, iar $\Sigma_5 x_a, \Sigma_5 y_b$ se referă la γ_a'' respectiv p_b din $T(\tilde{V}) - [(\cup \Delta'_i) \cup (\cup \Delta''_u)]$.

Un rol important în aplicarea inegalității (4.10) îl joacă folosirea unei relații care descrie configurația alcătuită din $T(\tilde{V})$, γ și domeniile Δ . Într-adevăr, formula (1.4) aplicată lui $T(\tilde{V})$ și γ ; $\cup \Delta'_i$ și $\gamma \cap (\cup \Delta'_i)$; respectiv $\cup \Delta''_u$ și $\gamma \cap (\cup \Delta''_u)$; ne dă

$$0 = \tilde{c}_0 - 2 + \sum (2 - c_j) - N(\gamma_a'') + N(p_b),$$

$$0 = \Sigma_1 (2 - c_j) - N_1(\gamma_a'') + N_1(p_b) - \Sigma \mu_j'',$$

$$0 = -h''' + \sum h_j''' + \Sigma_3 (2 - c_j) - N_3(\gamma_a'') + N_3(p_b) - N(\tilde{\gamma}_a) - \Sigma \mu_j''',$$

unde $\tilde{c}_0$ este ordinul de conexiune a lui $T(\tilde{V})$. Scăzînd ultimele două egalități din prima obținem *relația configurației*

$$0 = \tilde{c}_0 - 2 + \Sigma_5 (2 - c_j^*) - N_5(\gamma_a'') + N_5(p_b) + N(\gamma_a^{**}) + N(\gamma^*) - \Sigma h_j''' + h'''. \quad (4.11)$$

4.7. Dacă ne propunem să considerăm numai domenii complet ramificate de tipul Δ'_s sau Δ'_t , inegalitatea (4.10) se simplifică. Rezultă atunci

$$c - 2 + \sum_6 n_j \left(2 - c_j^* - \frac{h'_j + h''_j}{2} \right) - \sum_6 x_a + \sum_6 y_b \geq 0 \quad (4.12)$$

¹ c_j^* reprezintă ordinul de conexiune a domeniului D_j^* obținut reunind D_j cu anumite domenii D_j' din $(\cup \Delta'_i) \cup (\cup \Delta''_u)$ și anumite componente conexe din γ .

unde Σ_6 este extinsă la domenii D_j , transversale γ_a'' și puncte p_b care nu sînt incluse în $\cup \Delta_i''$, iar $c_j^* = c_j - \mu_j''$ este ordinul de conexiune al domeniului D_j^* format reunind la D_j domeniile $\Delta_i'' \subset D_j$. De altfel, inegalitatea (4.12) rezultă și direct din (4.1) – (4.3).

În mod analog, considerînd numai domenii complet ramificate de tipul Δ_s' , din (4.10) sau direct din (4.1) și (4.2), obținem

$$c - 2 + \sum n_j \left(2 - c_j - \frac{h_j'}{2} \right) - \sum x_a + \sum y_b \geq 0 \quad (4.13)$$

4.8. Inegalitățile (4.10), (4.12) sau (4.13), pot fi completate prin procedeul pe care l-am utilizat în lucrarea [31], aprofundînd ramificarea peste fiecare domeniu D_j în parte și observînd că $\tilde{V}$ acopere total D_j . Fie d_{jq} un domeniu maxim al lui D_j din V , cu ordinul de conexiune $2 - c_{jq}$. El acopere total D_j cu n_{jq} foi și este complet ramificat peste cele h_j' domenii Δ_s' din D_j . Prin procedeul folosit mai dus deducem inegalitatea :

$$h_j' \leq 2(2 - c_j) + 2 \frac{c_{jq} - 2}{n_{jq}}. \quad (4.14)$$

Această inegalitate trebuie să aibă loc pentru toate domeniile d_{jq} , astfel încît

$$h_j' \leq 2(2 - c_j) + 2 \min_q \frac{c_{jq} - 2}{n_{jq}}. \quad (4.14')$$

Evident, sumînd pentru toate domeniile d_{jq} obținem evaluarea mai largă

$$h_j' \leq 2(2 - c_j) + 2 \sum_q \frac{c_{jq} - 2}{n_j}. \quad (4.14'')$$

Considerînd în loc de D_j domenii D_j^* formate reunind la D_j domeniile Δ_i'' pentru care fr. $\Delta_i'' \subset D_j$, stabilim formule analoage cu (4.14), unde h_j' se înlocuiește cu $h_j' + h_j''$, c_j cu $c_j^* = c_j - \mu_j''$, d_{jq} este un domeniu maxim al lui $\tilde{V}$ de pe D_j^* și intervin termeni corespunzători lui $\gamma \cup D_j^*$.

§ 2. Ramificarea acoperirilor poliedral exhaustibile

4.9. Inegalitatea fundamentală (4.10) închide toate formele teoremei discurilor, deduse pe cale topologică ([5], [6], [19], [21] [23] – [25], [31]) precum și multe rezultate noi relative la ramificarea acoperirilor de clasă P , care vor fi prezentate în acest paragraf.

Fie S_T^V o acoperire riemanniană și V_k o exhaustiune poliedrală. La fiecare etapă k a exhaustiunii vom aplica acoperirii S_T^V relațiile demonstrate în §1 al acestui capitol, notînd acum toate mărimile care intervin cu un indice suplimentar k .

Presupunem domeniile Δ alese independent de exhaustiune, deși același domeniu Δ poate fi un Δ' , un Δ'' , sau un Δ''' după etapa k , astfel încât numărul h al acestor domenii este dat prin relația :

$$h = h'_k + h''_k + h'''_k.$$

Printr-un raționament analog cu cel pe care l-am folosit în lucrare [31], plecând însă de data aceasta de la inegalitatea (4.10) și în condițiile generale ale unei exhaustiuni poliedrale arbitrare, stabilim propoziția :

P_1 . Dacă la fiecare etapă k a exhaustiunii există o mulțime de indici J_k , astfel încât

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_{jk}}{M_k} = 1$$

uniform pentru $j \in J_k$ și $M_k = \max_5 n_{jk}$ (adică max pentru indicii j din Σ_5), îndată ce k este destul de mare, avem

$$\sum_{J_k} (h'_{jk} + h''_{jk}) \leq 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_5 \frac{n_{jk}}{M_k} (2 - c_{jk}^*) + \frac{c_k - 2 + R_k}{M_k} \right] \quad (4.15)$$

Pentru a preciza acest rezultat, vom face următoarea observare O_1 . Dacă $T(V)$ (în particular, dacă S) are gen finit g_0 și dacă numărul circuitelor și transversalelor din γ_k este mărginit independent de k , atunci $|2 - c_{jk}^*|$, pentru indicii j cu $D_{jk} \subset T(V_k)$, este mărginit independent de k .

P_2 . În ipoteza O_1 , dacă pentru orice k există o mulțime de indici J_k astfel încât

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_{jk}}{M_k} = 1 \text{ sau } 0$$

după cum $j \in J_k$ respectiv $j \notin J_k$, atunci

$$\sum_{J_k} (h'_{jk} + h''_{jk}) \leq 2 \left[\sum_{J_k} (2 - c_{jk}^*) + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_k - 2 + R_k}{M_k} \right]. \quad (4.15')$$

În particular, P_1 și P_2 se aplică dacă pentru fiecare k există un domeniu D_{jk} acoperit mult mai mult decât celelalte, astfel încât mulțimea J_k se reduce la un singur element.

Ca și în lucrarea [31], propoziții analoge cu P_1 și P_2 se stabilesc folosind relațiile (4.12) sau (4.13), unde M_k devine $\max_6 n_{jk}$ (adică max pentru indicii j din Σ_6) respectiv $\max n_{jk}$. Inegalitățile de acest fel se completează cu (4.14).

4.10. P_3 . Dacă V_k este o exhaustiune poledrală a acoperirii S_T^V , iar $n_k \leq \min_{j,u} \{n_{jk}, \text{ pentru } D_{jk} \subset T(\bar{V}_k) \text{ din } \Sigma_5; n_k'''\}$ atunci

$$h \leq 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{c_k - 2}{n_k} + \sum_5 \frac{n_{jk}}{n_k} (2 - c_{jk}^*) + \frac{1}{n_k} \left[- \sum_5 x_{ak} + \sum_5 y_{bk} + \sum x_{ak}^* - \sum_u \left[\sum_j \frac{n_{jk}}{n_k} h_{juRk}''' + \frac{n_{uk}'''}{n_k} \left(\sum_j h_{juIk}''' - 1 \right) \right] \right] \right\}^1 \quad (4.16)$$

¹ Ultima $\sum_u$ fiind ≥ 0 se poate neglija.

Dacă

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \sum_5 \left(\frac{n_{kj}}{n_k} - 1 \right) (2 - c_{jk}^*) + \sum_5 \left(1 - \frac{x_{ak}}{n_k} \right) + \sum_5 \left(\frac{y_{bk}}{n_k} - 1 \right) + \right. \\ \left. + \sum \left(\frac{x_{ak}^{**}}{n_k} - 1 \right) - \sum_u \left[\sum_j \left(\frac{n_{jk}}{n_k} - 1 \right) h_{juRk}''' + \left(\frac{n_{uk}'''}{n_k} - 1 \right) \left(\sum_j h_{juIk}''' - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \leq 0 \quad (4.17)$$

atunci

$$h \leq 2 \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left(2 - \tilde{c}_{ok} + \frac{c_k - 2}{n_k} \right). \quad (4.18)$$

Dacă în ipoteza (4.17), T (V) are ordin de conexiune finit $\tilde{c}_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{c}_{ok}$,

atunci

$$h \leq 2 \left(2 - \tilde{c}_0 + \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{c_k - 2}{n_k} \right)^1. \quad (4.19)$$

Dacă în ipoteza (4.19), V are și ea ordin de conexiune finit, iar $n_k \rightarrow \infty$,
atunci

$$h \leq 2 (2 - \tilde{c}_0) \leq 4; \quad (4.20)$$

n particular, dacă V este simplu conex

$$h < 2(2 - \tilde{c}_0), \text{ deci } h \leq 3, \quad (4.20')$$

ar dacă $\tilde{c}_0 = 1$

$$h \leq 1. \quad (4.20'')$$

Pentru a stabili inegalitatea (4.16) folosim (4.10) și (4.9), iar pentru (4.18) ținem seama de formula configurației (4.11).

În cazul acoperirilor cvasitotal exhaustibile în sens strict (cap. II, 2,3, 4°) obținem din propoziția P_3 următoarea teoremă:

T_1 . Fie S_T^V o acoperire cvasitotal exhaustibilă în sens strict, unde $T(V)$ are gen finit, iar numărul circuitelor și transversalelor este mărginit independent de k ; atunci h satisface inegalitatea (4.19) pentru n_k numărul foilor complete ale lui $\tilde{V}_k$ peste $T(\tilde{V}_k)$. Dacă presupunem și că V are ordin de conexiune finit, iar $n_k \rightarrow \infty$, are loc inegalitatea (4.20): în particular, pentru V simplu conex este verificată relația (4.20): în particular, pentru V simplu conex este verificată relația (4.20') și, adăugînd ipoteza $T(V)$ simplu conex, deschiș, relația (4.20'').

Într-adevăr (4.19) rezultă conform P_3 , deoarece pentru S_T^V acoperire cvasitotal exhaustibilă în sens strict, adăugînd condițiile din O_1 , (4.17) este îndeplinită și $T(V)$ are ordin de conexiune finit.

¹ Cînd $T(V) = S$, sau începînd de la un rang k , $T(V_k) = T(V)$, (ceea ce implică $T(V) = S$ compact), $\tilde{c}_0 = c_0$ ordinul de conexiune al lui S .

P_4 . Fie S_T^V o acoperire poliedral exhaustibilă, $M_k = \max_5 n_{jk}$ și

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_{jk}}{M_k} = 1, \quad (4.21)$$

uniform pentru j din Σ_5 cu $D_{jk} \subset T(\overset{\circ}{V}_k)$ și

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_{uk}''}{M_k} = 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{ak}}{M_k} = 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_{bk}}{M_k} = 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{ak}^{**}}{M_k} = 1 \quad (4.22)$$

uniform în indicii din sumele respective din (4.16). Atunci rezultatele P_3 și T_1 rămân valabile, înlocuind n_k cu M_k în toate relațiile (4.16) – (4.19).

Se observă că P_4 poate fi formulată folosind orice altă mărime M_k , cu proprietățile (4.21) și (4.22), în loc de M_k , de exemplu $\max_6 n_{jk}$ sau $\max n_{jk}$, și în ultimul caz obținem consecința:

$C_1.P_4$ se aplică acoperirilor cvasitotale în sens larg, pentru care au loc relațiile (4.22) cu $M_k = \max n_{jk}$:

4.11. Alte propoziții se pot demonstra în mod analog, folosind inegalitatea (4.12).

P_5 . Fie S_T^V o acoperire poliedral exhaustibilă,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_{jk}}{M_k} = 1$$

uniform pentru indicii j din Σ_6 , $D_{jk} \subset T(V_k)$, M_k fiind $\max_6 n_{jk}$.

Atunci pentru k suficient de mare

$$h'_k + h''_k \leq 2 \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_6 \frac{n_{jk}}{M_k} (2 - c_{jk}^*) + \frac{c_k - 2 - \sum_6 x_{ak} + \sum_6 y_{bk}}{M_k} \right] \quad (4.23)$$

În cazul în care

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_6 \left(\frac{n_{jk}}{M_k} - 1 \right) (2 - c_{jk}^*) + \sum_6 \left(1 - \frac{x_{ak}}{M_k} \right) + \sum_6 \left(\frac{y_{bk}}{M_k} - 1 \right) \right] \leq 0 \quad (4.24)$$

avem

$$h'_k + h''_k \leq 2 \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left(2 - \tilde{c}_{0k} + \frac{c_k - 2}{M_k} \right). \quad (4.25)$$

Adăugînd la (4.24) ipoteza $\tilde{c}_0$ finit,

$$h'_k + h''_k \leq 2 \left(2 - \tilde{c}_0 + \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{c_k - 2}{M_k} \right); \quad (4.26)$$

în particular, dacă V are ordin de conexiune finit și S_T^V o infinitate de foi

$$h'_k + h''_k \leq 2(2 - \tilde{c}_0) \leq 4. \quad (4.27)$$

Din nou, condițiile din O_1 și ipoteza $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{ak}}{M_k} = 1$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_{bk}}{M_k} = 1$ pentru γ''_{ak} și p_{bk} din Σ_6 , asigură inegalitatea (4.24) și consecințele ei. P_5 se aplică în particular acoperirilor evasitotal exhaustibile în sens larg.

4.12. P_6 . Pentru acoperirile evasitotal exhaustibile în sens larg, deducem din (4.13) relații analoge cu (4.16) – (4.20) relative la h'_k . Astfel îndată ce k este suficient de mare

$$h'_k \leq 2 \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[\sum \frac{n_{jk}}{M_k} (2 - c_{jk}) + \frac{c_k - 2 - \sum x_{ak} + \sum y_{bk}}{M_k} \right] \quad (4.28)$$

Dacă

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[\sum \left(\frac{n_{jk}}{M_k} - 1 \right) (2 - c_{jk}) + \sum \left(1 - \frac{x_{ak}}{M_k} \right) + \sum \left(\frac{y_{bk}}{M_k} - 1 \right) \right] \leq 0$$

atunci

$$h'_k \leq 2 \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left(2 - \tilde{c}_{0k} + \frac{c_k - 2}{M_k} \right), \quad (4.29)$$

etc.

4.13. P_7 . Să presupunem că domeniile D_{jk} sînt astfel numerotate încît j descrie pentru fiecare k mulțimea J a tuturor indicilor și că există un număr M_k și, uniform în raport cu indicii $j \in J$, limitele

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_{jk}}{M_k} = \alpha_j$$

Dacă $\inf_j \alpha_j > 0$, atunci oricare ar fi $\varepsilon > 0$, pentru k suficient de mare, conform (4.10),

$$\sum \alpha_j (h'_{jk} + h''_{jk}) \leq 2 \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[\sum \frac{n_{jk}}{M_k} (2 - c_{jk}^*) + \frac{c_k - 2 + R_k}{M_k} \right] + \varepsilon, \quad (4.30)$$

Dacă există și

$$\alpha''' = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\min_u n'''_{uk}}{M_k},$$

majorînd R_k cu (4.9), apare în stînga inegalității deduse din (4.30), și termenul $\alpha''' h_k'''$. Evident și în acest caz, obținem din nou propoziții anologice cu cele precedente.

O_2 . În toate inegalitățile din acest paragraf, $\overline{\lim}$ se poate înlocui cu o limită oarecare, folosind subșirul de indici k corespunzător.

§ 3. Aplicații

4.14. În lucrarea [31] am cercetat direct ramificarea acoperirilor parțial regulat exhaustibile. Vom adăuga acum cîteva observări pe baza propozițiilor generale din § 2 :

Ipoteza : S_T^V acoperire parțial regulată, aduce simplificări tuturor relațiilor din §1. Într-adevăr γ_k este format în acest caz dintr-un număr finit de curbe Jordan, disjuncte două câte două, fiecare frontieră comună la două domenii în care descompune S . Prin urmare la fiecare etapă k , nu vor exista inițial transversale γ_a'' și puncte p_b , iar prin considerarea domeniilor Δ_u''' , se vor forma numai transversale cu ambele extremități pe fr. Δ_u''' . Formulele (4.1) — (4.4) nu cuprind y_b , x_a , x_a^{**} , ci numai x_a^* , iar clasificarea transversalelor conține numai clase $1, \dots, \Lambda_1$; evaluarea restului (4.9) devine

$$R \leq -\frac{\sum_u n_u'''}{2} \leq -\frac{\min_u n_u'''}{2} \cdot h''', \quad (4.31)$$

($h_{juR}''' = 0$, $h_{juI}''' = 1$). Inegalitățile fundamentale (4.10), (4.12), (4.13) nu cuprind de asemeni termeni în y_b , x_a , x_a^{**} , iar formula de adunare a caracteristicilor și formula configurației ne dau

$$\sum_1 (2 - c_j) = \sum_2 \mu_j'', \quad \sum_3 (2 - c_j) = \sum_4 \mu_j''' \quad (4.32)$$

$$h''' = \sum h_j''' - N(\gamma^*), \quad 2 - \tilde{c}_0 = \sum_5 (2 - c_j^*).$$

Propozițiile din § 2 rămân valabile cu simplificările corespunzătoare¹. De exemplu în P_3 inegalitățile (4.16) și (4.17) devin respectiv

$$h \leq 2 \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_5 \frac{n_{jk}}{n_k} (2 - c_{jk}^*) + \frac{c_k - 2}{n_k} \right]$$

și

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sum_5 \left(\frac{n_{jk}}{n_k} - 1 \right) (2 - c_{jk}^*) \leq 0,$$

etc. [31].

Deoarece mulțimea γ_k constă numai din circuite disjuncte două câte două, dacă $T(V)$ are gen finit, condiția din O_1 : numărul circuitelor din γ_k este mărginit independent de k ² echivalează cu condiția: numărul domeniilor D_{jk} este mărginit independent de k . Pe de altă parte, dacă V are ordin de conexiune finit, rezultă succesiv că numărul curbelor din γ_k , numărul domeniilor D_{jk} , c_{jk} și $\tilde{c}_{jk}$ sînt mărginite independent de k ². Printre diferitele aplicații ale acestor observări, deducem de exemplu următoarea completare a T_1 :

T_2 . Fie S_T^V o acoperire parțial regulată și crasitotal strict exhaustibilă. Dacă V are ordin de conexiune finit, este verificată inegalitatea (4.19), iar atunci cînd acoperirea are și o infinitate de foi, are loc (4.20) (dacă V este simplu conex, avem (4.20')).

¹ La fiecare etapă k , toate mărimile ce intervin sînt scrise, ca în § 2 cu un indice suplimentar k .

² $\gamma_k = T(\Gamma_k)$, $D_{jk} \subset T(\tilde{V}_k)$.

După cum am arătat în lucrarea [31], rezultatele § 2 sînt aplicabile și acoperirilor E — cvasi-normal exhaustibile. În particular, am analizat cazul acoperirilor lui T. Kuroda, generalizînd astfel formula relativă la ramificarea acoperirilor E — cvasi-normal exhaustibile, cu E mulțime total discontinuă, precum și teorema discurilor pentru acoperiri normale exhaustibile, pe care le stabilisem în lucrările [25] respectiv [19].

În încheierea acestui capitol, remarcăm că înlăturarea ipotezei $\Delta \subset T(V)$ poate aduce indicații asupra numărului de componente ale mulțimii lacunare sau numărului de valori lacunare (a se vedea de asemenea [31], p. 141).

CAPITOLUL V

TEORIA REPARTIȚIEI VALORILOR

§ 1. Criterii de regulat exhaustibilitate

5.1. Consacrăm acest capitol metodei metrico-topologice de dezvoltare a teoriei repartiiiei valorilor. Bazele acestei metode au fost puse în celebrul memoriu publicat în 1935 de L. V. Ahlfors [3], care introduce noțiunea de *acoperire regulat exhaustibilă*: Fie S o suprafață înzestrată cu o metrică normală¹. Presupunem aria lui S finită și aleasă ca unitate. Acoperirea riemanniană S_T^V se numește *regulat exhaustibilă*, dacă există exhaustiunea poliedrală V_k a lui V astfel încît, notînd cu L_k lungimea frontierei Γ_k și cu A_k aria lui V_k , ambele măsurate cu metrica de pe S transpusă pe V cu ajutorul transformării T , să avem

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{L_k}{A_k} = 0.$$

L. V. Ahlfors a construit pentru acoperirile riemanniene regulat exhaustibile simplu conexe o teorie geometrică a repartiiiei valorilor corespunzătoare teoriei lui R. Nevalinna — teorema de echilibru, teorema discurilor, teorema defectelor. Rezultatele au fost extinse apoi la acoperiri regulat exhaustibile arbitrare².

Vom stabili în acest paragraf un criteriu general de regulat exhaustibilitate pentru acoperirile poliedrale, din care vom deduce apoi diferite criterii practice.

Fie S o suprafață cu metrică normală, S_T^V o acoperire riemanniană și V_k un șir de exhaustiune poliedrală a lui V . Frontiera Γ_k a lui V_k se proiectează pe γ_k , care descompune S în domeniile D_{jk} . Pe γ_k se pun în evidență circuitele γ'_{hk} cu $E_{\gamma'_{hk}} = 0$ și transversalele γ'_{ak} . Numerotăm aceste

¹ Ca în întreaga lucrare, S este suprafață triangulabilă și orientabilă. A se vedea definiția metricii normale în [3] sau [38], cap. X, p. 311.

² A se vedea indicații bibliografice (în [16], [17], [31], [39] — [42]).

curbe γ_{ik} (indiferent dacă sînt transversale sau circuite). Cele două borduri ale lui γ_{ik} sînt pe frontiera domeniilor $D_{j'k}$ și $D_{j''k}$ unde eventual $D_{j'k}$ poate coincide cu $D_{j''k}$. Notăm cu L_{ik} lungimea lui γ_{ik} , cu A_{jk} aria lui D_{jk} și cu s_{ik} respectiv n_{jk} numărul foilor acoperirii $S_T^{\circ k}$ pe γ_{ik} și D_{jk} .

T₁. *Condiția necesară și suficientă ca un subșir din V_k să fie șir de exhaustiune regulată este*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_i [(n_{j'k} - s_{ik}) + (n_{j''k} - s_{ik})] L_{ik}}{\sum_j n_{jk} A_{jk}} = 0, \quad (5.1)$$

Într-adevăr, pentru acoperirea $S_T^{\circ k}$ avem lungimea frontierei relative

$$L_k = \sum_i [(n_{j'k} - s_{ik}) + (n_{j''k} - s_{ik})] L_{ik},$$

iar numărul mediu al foilor

$$A_k = \sum_j n_{jk} A_{jk}.$$

Un caz deosebit de important este acel în care pentru orice k , la fiecare γ_{ik} se opresc foi numai dintr-o singură parte, $D_{j'k}$ de exemplu. Atunci

$$(n_{j'k} - s_{ik}) + (n_{j''k} - s_{ik}) = n_{j'k} - n_{j''k}, \quad (5.1')$$

ceea ce simplifică expresia (5.1). Conform T_3 , cap. III, 3.5, suprafețele E — cvasi-normale exhaustibile admit astfel de exhaustiuni.

Cîteva inegalități evidente permit să se deducă din (5.1) sau (5.1') diverse criterii necesare sau suficiente de regulat exhaustibilitate prin șirul V_k : În general, $0 \leq s_{ik} \leq \min(n_{j'k}, n_{j''k})$, deci

$$|n_{j'k} - n_{j''k}| \leq (n_{j'k} - s_{ik}) + (n_{j''k} - s_{ik}) \leq n_{j'k} + n_{j''k}. \quad (5.2)$$

În cazul cînd S este de gen 0 și orice γ_{ik} îl descompune (în particular cînd S_T° este parțial regulat exhaustibilă) sau cînd S este arbitrar însă exhaustiunea are proprietatea din T_3 , cap. III, 3.5, ipoteza $s_{ik} = 0$ implică $\min(n_{j'k}, n_{j''k}) = 0$, prin urmare

$$(n_{j'k} - s_{ik}) + (n_{j''k} - s_{jk}) \leq |n_{j'k} - 1| + |n_{j''k} - 1| \quad (5.2')$$

5.2 Introducînd ipoteze metrice asupra mulțimii $\mathcal{G}$ (Cap. III, 3.1), vom deduce acum din teorema generală T_1 diferite propoziții, generalizări directe de rezultate pe care le-am obținut în lucrările [25] și [31].

P_1 *O acoperire poliedral exhaustibilă cu mulțimea $\mathcal{G}$ de lungime nulă este regulat exhaustibilă.*

Într-adevăr, după P_9 , cap. III, 3.4 acoperirea este $\mathcal{G}$ — cvasinormal exhaustibilă și se aplică T_6 , [25].

În anumite cazuri, ipoteza $\mathcal{G}$ mulțime de lungime nulă este și necesară pentru regulat exhaustibilitate; demonstrăm în acest sens propozițiile C_1 și P_5 de mai jos.

C_1 . Condiția necesară și suficientă ca o acoperire normal exhaustibilă să fie regulat exhaustibilă este ca mulțimea lacunară să fie de lungime nulă.

C_1 este o consecință directă a următoarei propoziții [31], p. 144 :

P_2 . Acoperirile riemanniene, care admit o mulțime lacunară E de lungime pozitivă, nu sînt regulat exhaustibile.

P_3 . Fie S_T^V o acoperire poliedral exhaustibilă, cu mulțimea $\mathcal{E}$ de lungime finită sau $\sum_i L_{ik} < M$ pentru orice k . Dacă pentru o anumită mulțime J_k de indici j este îndeplinită una din următoarele două condiții :

$$\begin{aligned} \text{a) } \inf_k \sum_{j \in J_k} A_{jk} > 0 \quad \text{și} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\max_i (n_{jk} - s_{ik})}{\min_{j \in J_k} n_{jk}} &= 0 \\ \text{b) } \inf_{j \in J_k, k} A_{jk} > 0 \quad \text{și} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\max_i (n_{jk} - s_{ik})}{\sum_{j \in J_k} n_{jk}} &= 0 \end{aligned} \quad (5.3)^1$$

atunci S_T^V este regulat exhaustibilă.

Pentru suprafețe E-cvasinormal exhaustibile în sensul lui T. Kuroda se obține în ipoteza a) aplicată mulțimii $J_k = \{1\}$, dacă D_{1k} este domeniul de exhaustiune a lui $S - E$, propoziția :

C_2 Fie S_T^V o acoperire E-cvasinormal exhaustibilă, pentru care $\mathcal{E}$ are lungime finită dar

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\min_{i > 1} n_{ik}}{n_{1k}} = 1$$

Atunci S_T^V este regulat exhaustibilă.

P_4 . O condiție necesară respectiv suficientă pentru ca șirul V_k să conțină un subșir de exhaustiune regulată este evident ca

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\min (n_{jk} - s_{ik})}{\max n_{jk}} \sum L_{ik} = 0 \quad \text{sau} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\max (n_{jk} - s_{ik})}{\min n_{jk}} \sum L_{ik} = 0 \quad (5.4)$$

5.3. În cazul acoperirilor riemanniene S_T^V la care peste anumite domenii din S se află mai multe foi decît peste celelalte (acoperiri care au fost considerate și în cap. IV, 4.9) sînt valabile următoarele criterii :

P_5 . Fie S_T^V o acoperire poliedral exhaustibilă, pentru care există mulțimea de indici J_k și numărul M_k astfel încît

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_{jk}}{M_k} = 1$$

¹ În diferența $n_{jk} - s_{ik}$ indicele j va lua valorile j'_i și j''_i din formula (5.1).

uniform pentru $j \in J_k$ și astfel încît notînd cu $M_k^* = \max n_{jk}$ pentru indicii $j \in J_k$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M_k^*}{M_k} < 1 \quad (5.5)$$

Vom nota $\sum_i', \sum_i'', \sum_i'''$ sume $\sum_i L_{ik}$ relative la indici i pentru care γ_{ik} sînt pe frontiera reuniunii domeniilor D_{jk} , $j \in J_k$, în interiorul acestei reuniuni, respectiv în restul lui S .

Condiția $\sum_i' L_{ik} \rightarrow 0$ este necesară pentru regulat exhaustibilitatea acoperirii prin șirul V_k .

Dacă $\inf_k \sum_{j \in J_k} A_{jk} > 0$, $\sum_i' L_{ik} + \sum_i''' L_{ik}$ (sau ceea ce este echivalent $\sum_i L_{ik}$) este mărginită independent de k și în loc de (5.5) avem

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M_k^*}{M_k} = 0, \quad (5.6)$$

atunci condiția $\sum_i' L_{ik} \rightarrow 0$ este și suficientă.

Evident, $\sum_i L_{ik} < M$ se poate înlocui cu $\sum_i'' \theta_{ik} L_{ik} + \sum_i''' \theta_{ik} L_{ik} \rightarrow 0$,

unde $\theta_{ik} = \frac{(n_{j_i'k} - s_{ik}) + (n_{j_i''k} - s_{ik})}{M_k}$

Pentru acoperiri E — evasinormal exhaustibile în sensul lui T.Kuroda, $\sum_i' = \sum_i$ astfel încît P_1 și P_5 au următoarea consecință :

C₃. Dacă S_T^V este E-evasinormal exhaustibilă prin șirul V_k și dacă

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\max_{i \geq 2} n_{ik}}{n_{1k}} < 1$$

o condiție necesară și suficientă ca V_k să fie un șir de exhaustiune regulată este ca $\sum_i L_{ik} \rightarrow 0$, deci ca E să fie de lungime nulă.

5.4. Ipoteza evasitotal exhaustibilității, sub forma generală pe care am dat-o în cap. II, § 2, permite stabilirea următoarelor extinderi ale rezultatelor demonstrate în [31] p. 146 în cazul exhaustibilității parțial regulate evasitotale :

P₆. Fie S_T^V o acoperire evasitotal exhaustibilă în sens strict (cap. II, 2.3). Vom nota $\sum_i'$ respectiv $\sum_i''$ sumele relative la indicii i pentru care $\gamma_{ik} \subset \text{fr. } T(V_k)$ sau $\gamma_{ik} \subset \text{int. } T(V_k)$.

Condiția $\sum_i' L_{ik} \rightarrow 0$ este necesară pentru regulat exhaustibilitate prin șirul V_k , iar dacă $\sum_i'' L_{ik}$ (sau, ceea ce este echivalent $\sum_i L_{ik}$) este mărginită independent de k , această condiție este și suficientă.

Ca și în propoziția precedentă, $\sum_i'' L_{ik} > M$ se poate înlocui cu $\sum_i'' \theta_{ik} L_{ik} \rightarrow 0$, unde $M_k = n_k$. Dacă $\sum_i' L_{ik} \rightarrow 0$ (în particular, dacă

$S = T(V_k)$, deci $\sum_i L_{ik} = 0$), $\sum_i \theta_{ik} L_{ik} \rightarrow 0$ este o condiție necesară și suficientă.

C_4 . O acoperire cvasitotal exhaustibilă în sens strict peste S (adică pentru care $T(V_k) = S$, dacă k este suficient de mare), este regulat exhaustibilă, dacă $\sum_i L_{ik} < M$, independent de k .

Rezultate analoage se formulează pentru acoperiri cvasitotal exhaustibile în sens larg adăugînd condiția $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{s_{ik}}{M_k} = 1$, care este evident satisfăcută pentru exhaustiuni cu proprietatea din T_3 cap. III, 3.5.

§ 2. Cvasitotal exhaustibilitate și regulat exhaustibilitate

5.4. Încheiem acest capitol aprofundînd comparația pe care am făcut-o în lucrarea [31] între metoda topologică și cea metrico-topologică¹. Cu ajutorul ambelor metode se poate studia ramificarea acoperirilor riemanniene. Metoda metrico-topologică generalizată [42], p. 307 dă pentru o acoperire regulat exhaustibilă S_T^V , următoarea limitare superioară a numărului h de discuri complet ramificate :

$$h \leq 2 \left(2 - c_0 + \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{(c_k - 2)}{A_k} \right),$$

unde c_0 și c_k sînt ordinele de conexiune a lui S respectiv V_k (domeniu dintr-un șir de exhaustiune regulat a lui S_T^V), iar A_k are semnificația de mai sus. Pe de altă parte, după metoda topologică, dacă S_T^V este o acoperire cvasitotal exhaustibilă (în sens strict sau în sens larg) și condițiile din P_3 , T_1 respectiv P_4 , C_1 cap. IV, § 2 sînt îndeplinite, avem din nou

$$h \leq 2 \left(2 - c_0 + \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{c_k - 2}{M_k} \right)$$

unde $M_k = n_k$, respectiv $\max n_{jk}$, iar $T(V) = S$. Evident,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A_k}{M_k} = 1.$$

Aceste inegalități arată că cvasitotal exhaustibilitatea constituie un analog topologic al regulat exhaustibilității. Ea nu este însă un caz particular al acesteia, după cum rezultă din exemplele α din [31], p. 148 și β din [31], p. 149, pe care le numerotăm $E_{10\alpha}$ respectiv $E_{10\beta}$. În legătură cu $E_{10\beta}$, remarcăm că i se aplică teorema T_1 , cap. IV, § 2 (și deci inegalitatea de mai sus pentru h). În adevăr, plecînd de la șirul de exhaustiune cvasitotală în sens strict V_k , descris în lucrarea [31] putem forma un alt șir de acelaș fel, dacă adăugăm pe foaia S_k la cele T_k domenii jor-

¹ În acea lucrare, considerasem numai acoperiri parțial regulat exhaustibile, în timp ce acum metoda topologică este aplicată unor acoperiri poliedrale arbitrare.

daniene un domeniu jordanian exterior lui P adiacent tuturor acestor domenii și astfel încît reuniunea lor să formeze un singur domeniu jordanian de pe S_k . În acest mod la fiecare etapă k , γ_k constă dintr-o singură curbă Jordan.

CAPITOLUL VI

PROBLEMA TIPULUI

Clasificarea conformă a suprafețelor riemanniene induce o clasificare analoagă a acoperirilor riemanniene, care prezintă nu numai un deosebit interes teoretic dar și importante aplicații deoarece ades suprafețele riemanniene sînt definite cu ajutorul unei acoperiri. În acest sens, vom aminti criteriile de tip pe care le-am stabilit pentru diferite clase de acoperiri riemanniene în lucrarea [28]. Demonstrînd anumite proprietăți ale modului unui domeniu poliedric sau a unei reuniuni de astfel de domenii, precum și ale modului unei părți din frontieră, am stabilit variația modului prin extinderea domeniului, prin împărțirea grupelor de curbe frontieră considerate sau prin aplicarea unei transformări analitice. Din aceste rezultate am dedus criterii modulare sau integrale de apartenență la clasele O_G și C_Y sau criterii relative la tipul unui element frontieră pentru diferite acoperiri normal exhaustibile, E-cvasinormal exhaustibile, parțial regulat exhaustibile.

CONCLUZII

Cercetarea acoperirilor poliedrale, dezvoltată în această lucrare, constituie baza unei teorii unitare a acoperirilor riemanniene, ideia centrală fiind studiul acoperirii cu ajutorul proprietăților unei exhaustiuni.

Cu toată natura complexă și generalitatea problemei (orice acoperire riemanniană putînd fi considerată ca poliedral exhaustibilă) am obținut numeroase rezultate privind proprietățile locale ale acoperirii, mulțimile de valori limită, ramificarea, repartiția valorilor, problema tipului.

Metodele teoriei topologice a funcțiilor analitice creiată de prof. S. Stoilow, s-au dovedit și acum un instrument deosebit de puternic. Printre rezultatele obținute pe această cale, în lucrare, amintim de exemplu definirea acoperirilor cvasitotal exhaustibile pe care le-am introdus ca un analog topologic al acoperirilor regulat exhaustibile ale lui L. V. Ahlfors; pentru aceste acoperiri teorema discurilor ia o formă deosebit de elegantă, numărul domeniilor complet ramificate fiind dat de o inegalitate, ce depinde de ordinul de conexiune al suprafeței de acoperire și al suprafeței de bază. Metodele metrice își aduc și ele aportul pentru rezolvarea unor probleme specifice, ca de exemplu problema tipului conform.

Prin folosirea exhaustiunilor poliedrale ca o etapă auxiliară în studiul acoperirilor definite cu exhaustiuni mai generale și prin posibilitatea aprofundării altor aspecte ale teoriei suprafețelor riemanniene, lucrarea prezintă largi perspective de aplicare și dezvoltare.

BIBLIOGRAFIE

38. S. Stoilow: *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă*, vol. II, Ed. Acad. R.P.R., București, 1958.
39. L. Sario: *Meromorphic functions and conformal metrics on Riemann surfaces*. Pacific J. Math., 12, 1962, p. 1079—1098.
40. L. Sario: *Islands and peninsulas on arbitrary Riemann surfaces* Trans. Amer. Math. Soc. 106, 1963, 521—523.
41. L. Sario: *Value distribution under analytic mapping of arbitrary Riemann surfaces*, Acta Math., 109, 1963, p. 1—10.
42. K. Noshiro: *Contributions to the theory of the singularities of analytic functions*, Jap. Journ. Math. 19, 1948, p. 299—327.

КЛАССЫ РИМАНОВЫХ НАКРЫВАЮЩИХ, II

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Данная работа представляет собой вторую часть статьи с таким же заглавием, опубликованной в „Analele Universității București” 1964. (Нумерация формул и глав продолжает нумерацию из этой последней работы).

В главе IV, мы исследуем рамификацию римановых накрывающих S_T^V , допускающих полиэдрическое исчерпание V_k . Пусть c_k — порядок связности области V_k и предположим, что ее граница Γ_k проектируется через T на кривые γ_k со свойствами из 1.4, которые разбивают S на конечное число областей D_{jk} с порядком связности c_{jk} . Мы рассматриваем h дисков $\Delta \subset T(V)$ трех родов: Δ_{sk}' — включенные в одну D_{jk} ($s = 1, \dots, h_k'$), Δ_{tk}'' — содержащие самое меньшее одну D_{jk} и с границей в $S - \gamma_k$ ($t = 1, \dots, h_k''$), Δ_{uk}''' — граница которых содержит конечное число точек из γ_k ($u = 1, \dots, h_k'''$), $h_k' + h_k'' + h_k''' = h$. Предполагая, что Δ являются полностью разветвленными, мы устанавливаем, с помощью формул (1.3) и (1.4) и классификации пересекающих (трансверсальной), образованных на γ_k , неравенство

$$(c_k - 2) + \sum_5 n_{jk} \left[2 - (c_{jk} - \mu_{jk}'' - \mu_{jk}''') - \frac{h_{jk}' + h_{jk}''}{2} \right] + R_k \geq 0, \quad (4.10)$$

$R_k = - \sum_5 x_{ak} + \sum_5 y_{bk} + \sum x_{ak}^{**} - \sum_{j,u} n_{jk} h_{juRk}''' + \sum_u n_{uk}''' \left(\frac{1}{2} - \sum_j h_{juIk}''' \right)$, где $\sum_5$ относятся к областям $D_{jk} \notin (\cup \Delta_{tk}'') \cup (\cup \Delta_{uk}''')$, μ_{jk}'' и μ_{jk}''' обозначают число кривых границы D_{jk} , содержащихся в $\cup \Delta_{tk}''$, соответственно в $\cup \Delta_{uk}'''$, h_{jk}' и h_{jk}'' — число областей $\Delta_{sk}' \subset D_{jk}$, соответственно Δ_{tk}'' с границей, содержащейся в D_{jk} , h_{juRk}''' и h_{juIk}''' — число некоторых областей Δ_{ujpk}''' (обозначая через Δ_{ujpk}''' области, из которых состоит $\Delta_{uk}''' \cap D_{jk}$), x_{ak}^{**} , y_{bk}^{**} , n_{jk} — число листов $S_T^{V_k}$ на некоторых из пересекающих γ_{ak}^{**} и γ_{ak}^{**} , образованных на γ_k ; на исключительных точках или узлах p_{bk} соответственно на D_{jk} , а n_{uk}''' — число листов $S_T^{V_k}$, полностью накрывающих Δ_{uk}''' .

Мы получаем также и формулы (4.11), (4.12) и (4.14). На основе этих результатов выводим различные формы теоремы дисков: предложения P_1 и P_2 о разветвленности накрывающих, для которых существует группа областей D_{jk} больше накрытых, чем другие, при любом k ; общие предложения P_3-P_5 , P_7 и их применения T_1 , C_1 , P_6 , P_6 к квазитотально исчерпываемым накрывающим в строгом, собственно широком, смысле. Например, T_1 : Если S_T^V — квазитотально исчерпываемое накрывающее в строгом смысле, $\tilde{T}(V)$ имеет конечный род и число контуров и пересекающих ограничено, независимо от k , тогда h удовлетворяет (4.19), где n_k — число листов $S_T^{V_k}$, полностью накрывающих $T(\tilde{V}_k)$. Если V имеет конечный порядок связности и $n_k \rightarrow \infty$ с k , тогда справедливо (4.20), (в частности, если $\tilde{V}$ односвязное, то $h < 2(2 - c_0)$, следовательно, $h \leq 3$ и если $c_0 = 1$, $h \leq 1$), (здесь c_0 — порядок связности $T(V)$).

Глава V содержит критерии для того, чтобы накрывающее с полиэдрическим исчерпанием было бы регулярно исчерпываемым в смысле Альфорса. С помощью общего необходимого и достаточного критерия для того, чтобы подпоследовательность из V_k была бы последовательность регулярного исчерпания T_1 , (5.1), мы устанавливаем различные критерии, используя метрические гипотезы относительно множества $\mathcal{S}$, P_1-P_3 , или рассматривая специальные типы накрывающих (квазитотально, E — квазинормально исчерпываемых) C_2-C_5 , P_4-P_6 .

В главе VI мы получаем критерии для конформного типа римановых накрывающих.

CLASSES DE RECOUVREMENTS RIEMANNIENS, II

R É S U M É

Ce travail constitue la deuxième partie du travail avec le même titre paru dans „Analele Universității din București” 1964. (La numération continue celle de ce travail).

Dans le chap. IV nous étudions la ramification des recouvrements riemanniens S_T^V , qui admettent une exhaustion polyédrique V_k . Supposons que le domaine polyédrique V_k de V ait l'ordre de connexion c_k et que sa frontière Γ_k se projette par T sur les courbes γ_k avec les propriétés du no. 1.4, qui décomposent S dans des domaines D_{jk} ayant l'ordre de connexion c_{jk} . Choisissons sur γ_k les circuits γ'_k , qui ne contiennent pas des nœuds de γ_k : $\mathcal{S}_k \cap \gamma_k = 0$. Les ensembles de points exceptionnels $E_{\gamma'_k}$ et $[(E_k \cap \mathcal{S}_k) - \gamma'_k]$ décomposent γ'_k resp. $\gamma_k - \gamma'_k$

en transversales γ''_{ak} . Soient n_{jk} , x_{ak} et y_{bk} le nombre des feuillets du recouvrement $S_T^{V_k}$ sur D_{jk} , γ''_{ak} resp. $p_{bk} \in E_{\gamma'_k} \cup [(E_k \cap \mathcal{S}_k) - \gamma'_k]$. Nous démontrons par une méthode topologique un théorème général des disques, qui contient comme des cas particuliers le théorème des disques de S. Stoilow [6], ainsi que nos résultats antérieurs sur la ramification des recouvrements riemanniens normalement, E -quasi-normalement et partiellement régulièrement exhaustibles [19], [25], [31].

Nous considérons h disques $\Delta \subset T(V)$ de trois espèces: Δ'_{sk} — inclus dans un D_{jk} ($s=1, \dots, h'_k$), Δ''_{tk} — contenant au moins un D_{jk} et tels que fr. $\Delta'_{tk} \subset S - \gamma_k$ ($t=1, \dots, h''_k$), et Δ'''_{uk} — pour lesquels fr. $\Delta'''_{uk} \cap \gamma_k$ consiste dans un nombre fini de points ($u=1 \dots h'''_k$), $h'_k + h''_k + h'''_k = h$. A l'aide des formules (1.3) et (1.4) et d'une classification des transversales γ''_{ak} et de celles qui interviennent à cause des frontières de Δ'''_{uk} , nous obtenons une inégalité fondamentale:

$$(c_k - 2) + \sum_s n_{jk} \left[2 - (c_{jk} - \mu''_{jk} - \mu'''_{jk}) - \frac{h'_{jk} + h''_{jk}}{2} \right] + R_k \geq 0 \quad (4.10)$$

où la somme $\sum_5$ se rapporte aux domaines $D_{jk} \not\subset (\cup \Delta'_{lk}) \cup (\cup \Delta''_{uk})$, μ'_{jk} et μ''_{jk} désignent le nombre des courbes de fr. $D_{jk} \subset \cup \Delta'_{lk}$ resp. $\cup \Delta''_{uk}$, h'_{jk} et h''_{jk} le nombre des domaines $\Delta'_{sk} \subset D_{jk}$ resp. Δ'_{lk} tels que fr. $\Delta'_{lk} \subset D_{jk}$ et

$$R_k = - \sum_5 x_{ak} + \sum_5 y_{bk} + \sum x_{ak}^{**} - \sum_{j,u} n_{jk} h''_{juRk} + \sum_u n_{uk}''' \left(\frac{1}{2} - \sum_j h''_{juIk} \right)$$

où x_{ak}^{**} et n_{uk}''' expriment le nombre des feuilletts de $S_T^{V_k}$ sur certaines transversales γ_{ak}^{**} resp.

des feuilletts de $S_T^{V_k}$ qui recouvrent complètement Δ''_{uk} , Δ''_{upk} les domaines dans lesquels se décompose $\Delta''_{uk} \cap D_{jk}$, tandis que h''_{juRk} et h''_{juIk} le nombre de certaines domaines Δ''_{upk} . Nous obtenons aussi les formules (4.11), (4.13) et (4.14'). De ces résultats nous déduisons différentes formes du théorème des disques; les propositions P_1 et P_2 sur la ramification des recouvrements pour lesquels il y a un groupe de domaines D_{jk} couverts plus que les autres à chaque étape k de l'exhaustion, les propositions générales P_3-P_5 , P_7 et leurs applications T_1 , C_1 , P_5 , P_6 aux cas des recouvrements quasi-totalement exhaustibles au sens strict ou large. Citons, par exemple, le théorème T_1 : Si $S_T^{V_k}$ est un recouvrement quasi-totalement exhaustible au sens strict, $T(V)$ a le genre fini et le nombre des circuits et des transversales est borné indépendamment de k , alors h vérifie (4.19) où n_k est le nombre des feuilletts complets de $\tilde{V}_k$ sur $T(\tilde{V}_k)$. Si V a l'ordre de connexion fini et $n_k \rightarrow \infty$ avec k , alors a lieu l'inégalité (4.20); en particulier, si V est simplement connexe $h < 2(2 - \tilde{c}_0)$, donc $h \leq 3$, et si $\tilde{c}_0 = 1$, $h \leq 1$ ($\tilde{c}_0$ est l'ordre de connexion de $T(V)$).

Le chap. V, contient des critères pour qu'un recouvrement à exhaustion polyédrique soit régulièrement exhaustible au sens d'Ahlfors. A l'aide d'un critère général nécessaire et suffisant pour qu'une sous-suite de V_k soit suite d'exhaustion régulière, T_1 , (5.1), nous démontrons différents critères, en introduisant des hypothèses métriques par rapport à l'ensemble $\mathbb{S}$, P_1-P_3 , ou en considérant différents types de recouvrements (quasi-totalement, E-quasi-normalement exhaustibles), C_2-C_5 , P_4-P_6 .

Le chap. VI est consacré au problème du type des recouvrements riemanniens.

TEOREMA DE EXISTENȚĂ A SOLUȚILOR PROBLEMEI CAUCHY PENTRU ECUAȚIA UNDELOR ITERATĂ

VERONICA ANTOHI-TEODORESCU

Fie ecuația undelor iterată

$$\square^p u = 0, \quad \square u = \Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

cu condițiile Cauchy

$$\left. \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \right|_{t=0} = u_\alpha^{(0)}, \quad \alpha = 0, \dots, 2p-1 \quad (2)$$

Dacă funcțiile $U_\alpha^{(0)}$ sînt de clasă $C^{2p-\alpha-1}$, atunci cu ajutorul condițiilor (2) putem deduce valorile tuturor derivatelor funcției u pînă la ordinul $2p-1$ de-a lungul hiperplanului $t = 0$, după legea

$$\left. \frac{\partial^l u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n} \partial t^{\alpha_{n+1}}} \right|_{t=0} = \frac{\partial^{l-\alpha_{n+1}} u_{\alpha_{n+1}}^{(0)}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Teoremă. Fie ecuația (2) cu condițiile (2) Dacă

$$\begin{cases} u_{2\beta}^{(0)} \in W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+m+p-\beta} \\ u_{2\beta+1}^{(0)} \in W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+m+p-\beta-1}, \quad \beta = 0, \dots, p-1 \end{cases} \quad (3)$$

problema Cauchy propusă admite soluție ce aparține spațiului $W^{\left[\frac{n}{2}\right]+m+p}$, Dacă $m = p + 1$ atunci soluția problemei este de clasă C^{2p} .

Demonstrație. Rezolvarea ecuației (1) cu condițiile (2) se reduce la rezolvarea unui sistem de p ecuații,

$$\square w_j = w_{j+1}, \quad j = 0, \dots, p-1, \quad w_0 = u, \quad w_p = 0 \quad (4)$$

cu condițiile

$$\begin{cases} w_j \Big|_{t=0} = \sum_{i=0}^j (-1)^i C_j^i \Delta^{j-i} u_{2i}^0 = u_0^{(j)} \\ \left. \frac{\partial w_j}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{i=0}^j (-1)^i C_j^i \Delta^{j-i} u_{2i+1}^0 = u_1^{(j)} \end{cases}$$

Să considerăm mai întâi ultima ecuație a sistemului, cu condițiile

$$\square w_{p-1} = 0,$$

$$w_{p-1} \Big|_{t=0} = u_0^{(p-1)}, \quad \frac{\partial w_{p-1}}{\partial t} \Big|_{t=0} = u_1^{(p-1)}.$$

Conform teoremei lui Sobolev [1] dacă, $u_0^{(p-1)} \in W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+1+m}$ și $u_1^{(p-1)} \in W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+m}$ atunci $w_{p-1} \in W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+1+m}$ în orice hiperplan $t = \text{const.}$

Fie acum ecuația

$$\square w_{p-2} = w_{p-1}, \quad (6)$$

cu condițiile $w_{p-2} \Big|_{t=0} = u_0^{(p-2)}, \quad \frac{\partial w_{p-2}}{\partial t} \Big|_{t=0} = u_1^{(p-2)}.$

Cum $w_{p-1} \in W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+1+m}$, rezultă că $w_{p-1} \in L_2^l, l = 0, \dots, \left[\frac{n}{2}\right] + 1 + m.$

Dacă $u_0^{(p-2)} \in W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+1+m}$ și $u_1^{(p-2)} \in W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+2+m}$ atunci $w_{p-2} \in W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+2+m}.$

Aplicînd în continuare teorema lui Sobolev de $(p-2)$ ori deducem că

$$u = w_0 \in W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+m+p}, \quad (7)$$

dacă

$$u_0^{(p-j)} \in W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+m+j}, \quad u_1^{(p-j)} \in W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+m+j-1}. \quad (8)$$

Conform teoremei de imersiune, u este o funcție de clasă $C^{m+j-1}.$

Dacă $m = p + 1$, atunci $u \in C^{2p}.$

Condițiile (8) sînt verificate dacă datele inițiale $u_x^{(0)}$ satisfac condițiile (3).

BIBLIOGRAFIE

1. С. Л. Соболев: *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.*

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ

$$\square Pu = 0$$

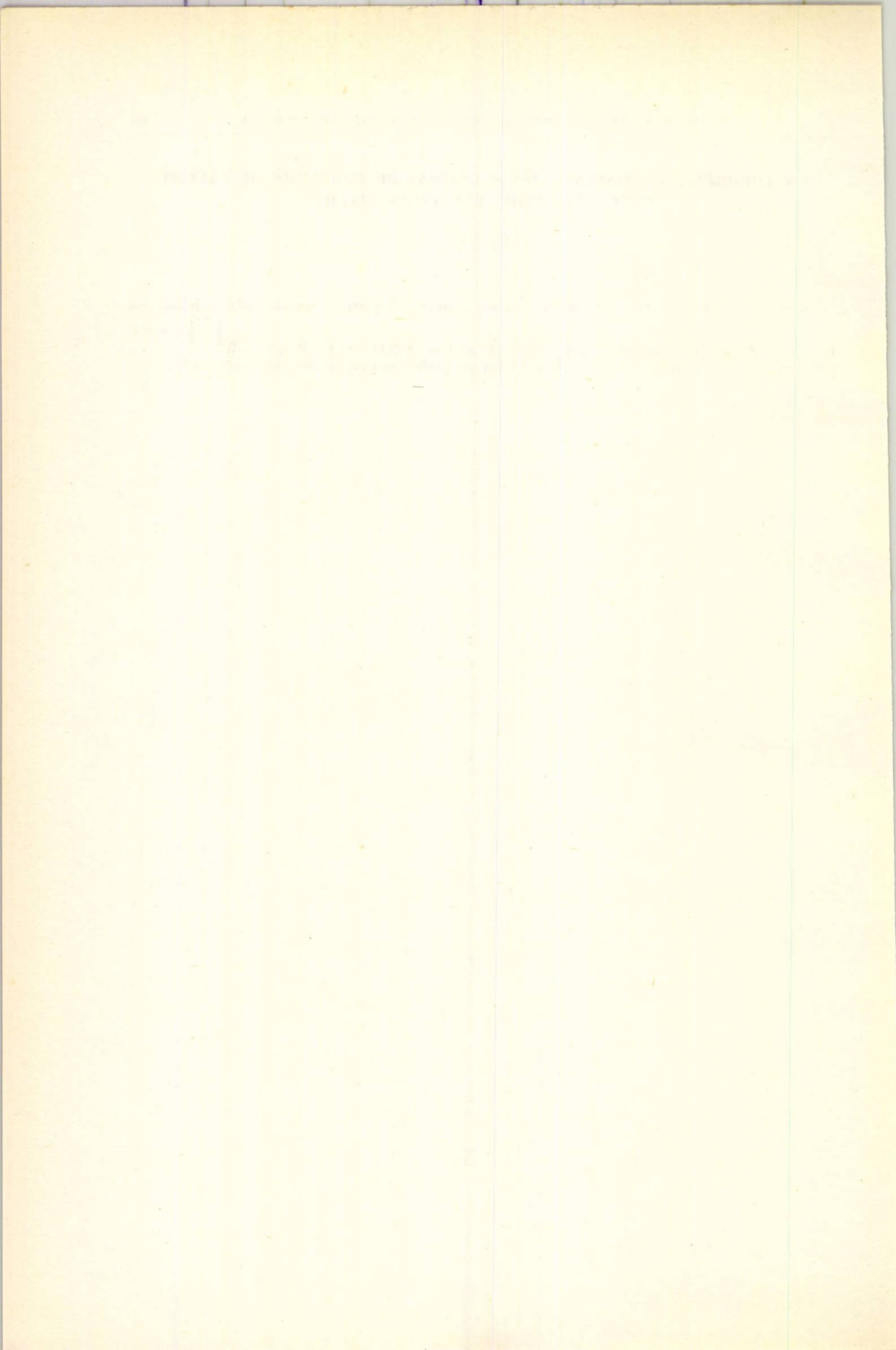
КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Если условия Коши (2) для (1) удовлетворяют (3), решение задачи Коши принадлежит пространству $W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+m+p}$. Если $m = p + 1$, решение задачи принадлежит пространству $C^{2p}.$

UN THÉORÈME D'EXISTENCE DES SOLUTIONS DU PROBLÈME DE CAUCHY
POUR L'ÉQUATION DES ONDES ITERÉ

R É S U M É

On démontre que si les conditions de Cauchy (2) pour l'équation (1) satisfont les relations (3), le problème de Cauchy pour (1) a une solution en l'espace $W_2 \left[\frac{n}{2} \right] + m + p$ pour chaque m . Si $m = p + 1$, la solution du problème proposé est de la classe C^{2p} .



ASUPRA UNUI MODEL CU VENIRI ÎN GRUP

G. CIUCU

În această notă, studiem un model de așteptare cu venituri în grup, în cazul general. În [1], am examinat acest model în cazul regimului de echilibru. Am văzut că ecuațiile modelului sînt următoarele :

$$\begin{cases} P'_r(n, t) = -(\lambda + \mu) P_r(n, t) + \sum_{k=1}^m \lambda_k P_{k1}(n-1, t) + \mu P_r(n+1, t) \\ P'_r(0, t) = \mu P_r(1, t) - \lambda P_r(0, t) \end{cases} \quad (1)$$

și

$$\begin{cases} P_{k1}(n, t) = p_{k1} P_{k2}(n-1, t) + q_{k1} P_r(n, t) \\ P_{k2}(n, t) = p_{k2} P_{k3}(n-1, t) + q_{k2} P_r(n, t) \\ \vdots \\ P_{ks}(n, t) = P_r(n, t) \end{cases} \quad (2)$$

Să considerăm funcția caracteristică

$$\Phi_r(n; t, u) = \sum_{n=0}^{\infty} P_r(n, t) e^{nu}$$

Utilizînd funcția caracteristică din relațiile (1) obținem

$$\begin{aligned} \Phi'_r(n; t, u) &= \frac{\mu}{e^{ui}} [\Phi_r(n; t, u) - P_r(0, t)] - \lambda P_r(0, t) - \\ &- (\lambda + \mu) [\Phi_r(n; t, u) - P_r(0, t)] + e^{ui} \sum_{k=1}^m \lambda_k \Phi_{k1}(n; t, u) \end{aligned} \quad (3)$$

unde

$$\Phi_{ks}(n; t, u) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ks}(n, t) e^{nu}$$

¹ G. Ciucu : „Asupra unui model de așteptare“. Lucrările Consfătuirii D.C.S. 1955.

iar din relațiile (2) avem

$$\begin{cases} \Phi_{k1} = p_{k1} e^{ui} \Phi_{k2} + L_{k1} \Phi_r \\ \Phi_{k2} = p_{k2} e^{ui} \Phi_{k3} + L_{k2} \Phi_r \\ \vdots \\ \Phi_{ks} = \Phi_r. \end{cases} \quad (4)$$

Înmulțind relațiile (4) respectiv cu $1, p_{k1} e^{ui}, p_{k1} p_{k2} e^{2ui}, \dots, p_{k1} p_{k2} \dots$
 $\dots p_{k, s-1} e^{(s-1)ui}$ obținem

$$\Phi_{k1} = [q_{k1} + p_{k1} q_{k2} e^{ui} + \dots + p_{k1} p_{k2} \dots p_{k, s-1} e^{(s-1)ui}] \Phi_r.$$

Notînd

$$A_k = q_{k1} + p_{k1} p_{k2} e^{ui} + \dots + p_{k1} p_{k2} \dots p_{k, s-1} e^{(s-1)ui}$$

și ținînd seama de (3), (5) și (6), avem

$$\Phi'_r = \Phi_r e^{ui} \left[\mu - (\lambda + \mu) e^{ui} + e^{2ui} \sum_{k=1}^m \lambda_k A_k \right] + P_r(0, t) \left[\frac{\mu}{e^{ui}} \left(\frac{1}{e^{ui}} - 1 \right) \right].$$

De unde rezultă expresia funcției caracteristice cu ajutorul căreia se pot determina caracteristicile modelului.

Obsevație. Dacă $n < 1$ atunci relațiile (3) și (4) devin

$$\Phi'_r(n; t, u) = -(\lambda + \mu) \Phi_r + e^{ui} \sum_{k=1}^m \lambda_k \Phi_{k1} + \mu e^{-ui} \Phi_r$$

$$\Phi_{k1} = p_{k1} e^{ui} \Phi_{k2} + q_{k1} \Phi_r$$

$$\Phi_{k2} = p_{k2} e^{ui} \Phi_{k3} + q_{k2} \Phi_r$$

$$\vdots$$

$$\Phi_{ks} = \Phi_r.$$

Rezultă atunci, că

$$\Phi'_r = -(\lambda + \mu) \Phi_r + \mu e^{-ui} \Phi_r + e^{ui} \Phi_r \sum_{k=1}^m \lambda_k A_k$$

De unde se obține

$$\Phi_r(n; t, u) = e^{\left[-(\lambda + \mu) + \mu e^{-ui} + e^{ui} \sum_{k=1}^m \lambda_k A_k \right] t};$$

care constituie o generalizare a funcției caracteristice a proceselor Poisson. Se observă că dacă $\mu = 0, A_{k_0} = 1$, iar $A_k = 0$ pentru $k \neq k_0$ se obține funcția caracteristică a legii Poisson.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛЕ С ГРУППОВЫМИ ПРИХОДАМИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Рассматривается в случае нестационарного режима модель ожидания с групповыми приходами, определяемая уравнениями:

$$P'_r(n, t) = -(\lambda + \mu) P_r(n, t) + \sum_{k=1}^m \lambda_{k1} P_{k1}(n-1, t) + \mu P_r(n+1, t)$$

$$P'_r(0, t) = \mu P_r(1, t) - \lambda P_r(0, t)$$

$$P_{k1}(n, t) = P_{k1} P_{k2}(n-1, t) + q_{k1} P_r(n, t)$$

$$P_{k2}(n, t) = P_{k2} P_{k3}(n-1, t) + q_{k2} P_r(n, t)$$

$$\vdots$$

$$P_{ks}(n, t) = P_r(n, t).$$

SUR UN MODÈLE DE VENUES EN GROUPE

R É S U M É

On examine dans, le cas du regime nonstationnaire, un modèle d'attente avec venues en groupe, défini par des equations :

$$P'_r(n, t) = -(\lambda + \mu) P_r(n, t) + \sum_{k=1}^m \lambda_k P_{k1}(n-1, t) + \mu P_r(n+1, t)$$

$$P'_r(0, t) = \mu P_r(1, t) - \lambda P_r(0, t)$$

$$P_{k1}(n, t) = p_{k1} P_{k2}(n-1, t) + q_{k1} P_r(n, t)$$

$$P_{k2}(n, t) = p_{k2} P_{k3}(n-1, t) + q_{k2} P_r(n, t)$$

$$\vdots$$

$$P_{ks}(n, t) = P_r(n, t).$$

ASUPRA MIȘCĂRII PLANE A FLUIDELOR PERFECTE ÎN PREZENȚA CORPURILOR ALUNGITE *

ȘT. I. GHEORGHITĂ

1. Mișcarea staționară plană irotațională a fluidelor perfecte incompresibile în prezența unor corpuri impermeabile este o problemă expusă pe larg în cărțile de mecanica fluidelor (de ex. [1], p. 416; [2], pp. 141, 196). Se cunosc de mult soluțiile exacte pentru mișcarea în prezența unui cilindru eliptic, pentru un cilindru a cărui secțiune e limitată de două arce de cerc, sau pentru un contur cilindric a cărui formă se află prin combinarea unor surse pozitive și negative, punctuale sau uniform distribuite. Mai recent s-au studiat și alte cazuri de contururi cilindrice, cum ar fi cilindrul semi-circular ([3]; [1], p. 534), iar cu ajutorul unei metode semi-inverse s-au obținut soluții exacte pentru anumite clase de contururi [4].

În lucrarea de față, folosindu-se metoda semi-inversă, utilizată anterior pentru diferite probleme ale fizicii matematice, se va studia mai întâi mișcarea plană a fluidelor perfecte în prezența unei plăci semiinfinite de grosime constantă, urmărindu-se a se degaja influența formei bordului de atac asupra caracteristicilor mișcării. Apoi se va considera influența formei bordului de fugă asupra mișcării în vecinătatea bordului de atac, presupunându-se că forma acestui bord de atac este dată. În fine, se va arăta cum se pot obține contururi mai generale prin folosirea metodei semi-inverse împreună cu utilizarea unor izvoare plasate pe un contur sau în apropierea lui. Prin procedeele expuse se pot obține soluții exacte și pentru alte cazuri de mișcări mai generale.

2. Pentru a fixa ideile, vom presupune că la mari distanțe avem un curent uniform și algeam axa Ox paralelă cu viteza $\vec{V}_\infty$ la mari distanțe, astfel încît

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{v} = V_\infty \vec{i}. \quad (r^2 = x^2 + y^2) \quad (1)$$

Vom admite de asemeni că în planul mișcării avem un contur C simetric față de axa Ox , care este astfel încît

$$y_B = \pm h \text{ pentru } x \geq 0, \quad (2)$$

* Lucrare prezentată la Sesiunea Științifică Jubiliară a Centenarului Universității din București, 16 octombrie 1964.

porțiunea dintre punctul de impact, notat cu $A(-a, 0)$, și punctele $B(0, h)$ $B'(0, -h)$, de unde încep semidreptele care delimitează conturul, urmînd a fi aproximată cu ajutorul metodei semi-inverse. După cele arătate, e suficient de a ne ocupa numai de mișcarea din semiplanul superior, și deci putem presupune că avem curentul uniform în prezența conturului impermeabil $(-\infty, A, B, ih + \infty)$. Pentru punctele de pe semidreapta $(B, ih + \infty)$ va trebui să avem satisfăcută, evident, condiția (1).

Vom începe prin a considera în planul variabilei complexe $z = x + iy$ un contur format din semidreptele $(-\infty, 0)$ și $(ih, ih + \infty)$ și segmentul $(0, ih)$, iar semiplanul superior din planul z minus semibanda $x > 0, h > y > 0$ îl vom reprezenta conform pe semiplanul $y_1 > 0$ al variabilei complexe $z_1 = x_1 + iy_1$. Aplicînd formula lui Schwarz — Christoffel găsim imediat, impunînd ca punctelor O și B din planul z să le corespundă punctele de afixe -1 , respectiv, 1 , din planul z_1 :

$$z = \frac{h}{\pi} [\sqrt{z_1^2 - 1} - \ln(z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1})] + ih; \quad (3)$$

aci radicalii au determinațiile aritmetice pentru z real și > 1 , iar logaritmul este real pentru aceleași valori ale lui z_1 .

În planul z_1 vom presupune că arcului AB îi corespunde semielipsa A_1B_1 , punctele A_1 și B_1 avînd afixele, respectiv, a_1 și 1 , unde a_1 e un număr real. Semiaxa mare a elipsei va fi deci $(1 - a_1)/2$, iar semiaxa mică o vom nota cu b_1 . Vom trece mai departe la planul variabilei complexe z_2 , în care originea planului coincide cu centrul elipsei,

$$z_2 = z_1 - \frac{1 + a_1}{2}, \quad (4)$$

și deci punctele A_1 și B_1 le vor corespunde punctele de afixe, respectiv, $(1 - a_1)/2$ și $-(1 - a_1)/2$. În fine, vom trece de la semiplanul $y_2 > 0$ minus semielipsa de A_2B_2 la semiplanul $y_3 > 0$ al variabilei complexe z_3 în care arcului A_2B_2 îi corespunde segmentul $-1 < x_3 < 1, y_3 = 0$. O asemenea reprezentare conformă se folosește în metoda reprezentărilor conforme succesive (de ex. [5], p. 34) și, cu notațiile de aici, ea va fi

$$z_3 = 2 \frac{(1 - a_1)z_2 - b_1 \sqrt{4(z_2^2 + b_1^2) - (1 - a_1)^2}}{(1 - a_1)^2 - 4b_1^2}, \quad (5)$$

sau, exprimînd pe z_2 în funcție de z_3 ,

$$z_2 = \frac{1 - a_1}{2} z_3 + b_1 \sqrt{z_3^2 - 1}. \quad (6)$$

Curentului uniform cu viteza V_∞ în planul z îi va corespunde un curent uniform cu o viteză V_* paralelă cu Ox_3 . Relația dintre V_∞ și V_* se găsește imediat:

$$V_\infty = 2V_* (1 - a_1 - b_1) \pi [h\{(1 - a_1)^2 - 4b_1^2\}]^{-1}. \quad (7)$$

Să găsim ecuația arcului AB din planul fizic. Pentru aceasta nu avem decît să exprimăm pe z în funcție de z_3 , iar lui z_3 să-i dăm valori reale în intervalul $(-1, 1)$. Din (4) și (6) se găsește că

$$2z_1 = 1 + a_1 + (1 - a_1)z_3 + 2b_1\sqrt{z_3^2 - 1}, \quad (8)$$

iar valoarea lui z_1 din (8) se înlocuiește în (3), sau în expresia echivalentă

$$z = \frac{h}{\pi} (\sqrt{z_1^2 - 1} - \operatorname{arch} z_1) + ih. \quad (3')$$

Prin calcule simple se găsește că

$$x = \frac{h}{\pi} \left[U - \frac{1}{2} \ln \{x_1^2 + y_1^2 + \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)^2 + 2(y_1^2 - x_1^2) + 1} + 2x_1U + 2y_1V\} \right],$$

$$y = \frac{h}{\pi} \left[V + \operatorname{arctg} \frac{V}{U} \right] + h,$$

unde

$$U = \sqrt{\frac{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)^2 + 2(y_1^2 - x_1^2) + 1} - 1 - y_1^2 + x_1^2}{2}},$$

$$V = \sqrt{\frac{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)^2 + 2(y_1^2 - x_1^2) + 1} + 1 + y_1^2 - x_1^2}{2}},$$

$$x_1 = \frac{1 + a_1}{2} + \frac{1 - a_1}{2} x_3, \quad y_1 = 2b_1 \sqrt{1 - x_3^2}.$$

Aci au intervenit doi parametri, a_1 și b_1 . Dacă vom impune o condiție asupra unghiului în B dintre arcul AB și raza $(B, ih + \infty)$ sau ne vom da, de exemplu, poziția punctului A în planul fizic, atunci vom putea construi o familie de profile care depind doar de un singur parametru. În particular, dacă impunem ca în B arcul AB să aibă tangenta orizontală, relația dintre a_1 și b_1 se obține din condiția

$$\left(\frac{dy}{dz_3} \right)_{z_3=1} = 0. \quad (9)$$

Determinînd viteza complexă, care în general este și ea o formație de parametrii a_1 și b_1 , se va putea deduce în particular influența formei conturului AB asupra vitezelor pe raza $(B, ih + \infty)$.

Forma conturului AB se va putea aproxima dacă vom face uz și de alte reprezentări conforme. Să presupunem că am efectuat transformarea

(3), și că în planul z_1 arcul A_1B_1 se reprezintă ca un arc de cerc. În acest caz, notînd cu β_0 unghiul dintre tangenta la arcul B_1A_1 și raza $(B_1, -\infty)$, vom putea utiliza coordonatele bipolare [6], astfel încît prin relațiile (4) și

$$z_3 = \ln \frac{1 - a_1 + 2z_2}{1 - a_1 - 2z_2}, \quad z_2 = \frac{1 - a_1}{2} \operatorname{th} \frac{z_3}{2} \quad (10)$$

în planul z_3 avem o bandă $-\infty < x_3 < \infty$, $\beta_0 < y_3 < \pi$. Trecînd apoi în planul z_4 la o bandă $-\infty < x_4 < \infty$, $\pi - \beta_0 > y_4 > 0$, iar de la această bandă la semiplanul $y_5 > 0$ al variabilei $z_5 = x_5 + iy_5$ astfel încît punctele A_5 și B_5 să aibă, respectiv, afixele -1 și 1 , vom avea

$$z_3 = z_4 + i\beta_0, \quad (11)$$

$$z_4 = \frac{\pi - \beta_0}{\pi} \operatorname{th} \frac{1 + z_5}{1 - z_5}, \quad (12)$$

luînd determinația logaritmului astfel încît $z_1(0) = 0$.

Și aci avem la îndemînă doi parametri, a_1 și β_0 , și dispunînd de ei vom putea aproxima profilul dat în planul fizic. Dacă vom impune o condiție anumită asupra conturului, de exemplu condiția (9), atunci vom obține o familie de profile depinzînd de un singur parametru.

Forma conturului AB s-ar putea obține și cu ajutorul a mai multor reprezentări conforme succesive, așa cum se procedează în general cînd se folosește metoda semi-inversă. Vom da un exemplu în acest sens. După ce am trecut la planul variabilei z_1 , să reprezentăm conform semiplanul $y_1 > 0$ minus tăietura CC' cu extremitățile în punctele de afixe c , și, respectiv, $c + ic'$ pe semiplanul $y_2 > 0$, astfel ca extremitățile tăieturii $c + 0$, $c - 0$ să vină, respectiv, în punctele de afixe c' și $-c'$. Atunci legătura dintre z_2 și z_1 este

$$z_2 = \sqrt{(z_1 - c)^2 + c'^2}. \quad (13)$$

În planul z_2 conturul AB (sau o porțiune a acestui contur) să se reprezinte prin semicircumferința de rază R și cu centrul în punctul de afixă b . Dacă prin reprezentarea conformă a semiplanului $y_2 > 0$ minus semicercul cuprins între axa reală și semicircumferința indicată extremitățile circumferinței în noul plan z_3 vin în punctele de afixe, respectiv, $-R$ și R , atunci atunci legătura dintre z_3 și z_2 va fi

$$z_3 = \frac{1}{2} \left(z_2 - b + \frac{R^2}{z_2 - b} \right). \quad (14)$$

Se observă că în acest caz dispunem de patru parametri, c , c' , b și R . Exemple de acest fel s-ar putea înmulți, și în general soluția problemelor se obține parametric, astfel încît la fiecare valoare a unui parametru complex cu partea imaginară pozitivă corespunde un punct în planul fizic (din domeniul mișcării), o valoare pentru potențialul complex și pentru viteza complexă.

3. Vom considera acum tot mișcarea unui curent uniform la mari distanțe astfel că (1) continuă să rămînă valabilă, în prezența unui contur

simetric față de axa Ox . Limitându-se la mișcarea în semiplanul superior, fie A punctul de impact al curentului și punctul C punctul de fugă. Pe arcul AC fie un punct B și presupunând că porțiunea AB este dată, iar BC trebuie să se determine în urma unor condiții, să aplicăm și aici metoda semiinversă.

Pentru a fixa ideile vom lua AB un arc de circumferință de rază R și vom aplica mai întâi transformarea lui Jukowski, astfel încât în noul plan z_1 punctele de afixe $-R$ și R să corespundă punctelor de afixe $-\bar{R}$ și, respectiv, R din planul fizic. Atunci între z și z_1 subsistă relațiile

$$2z_1 = z + R^2 z^{-1}, \quad z = z_1 + \sqrt{z_1^2 - R^2}. \quad (15)$$

Să luăm mai departe punctul B_1 în origine, astfel încât arcul AB este un sfert de circumferință. Fie mai întâi imaginea arcului BC în planul z_1 o semielipsă de semiaxe a și b , deci în planul z_1 punctul C_1 are afixa $2a$. Dacă în planul z_2 avem pentru punctele B_2 și C_2 afixele -1 și, respectiv, 1 , atunci legătura dintre z_2 și z_1 va fi

$$z_2 = \frac{a(z_1 - a) - b\sqrt{z_1^2 - 2z_1 a + b^2}}{a^2 - b^2}, \quad (16)$$

sau

$$z_1 = a(z_2 + 1) + b\sqrt{z_2^2 - 1}. \quad (16')$$

Din (15) și (16') se deduce relația dintre z și z_2 :

$$z = a(z_2 + 1) + b\sqrt{z_2^2 - 1} + \sqrt{(a^2 + b^2)z_2^2 + 2a^2 z_2 + 2ab(z_2 + 1)\sqrt{z_2^2 - 1} + a^2 - b^2 - R^2}. \quad (17)$$

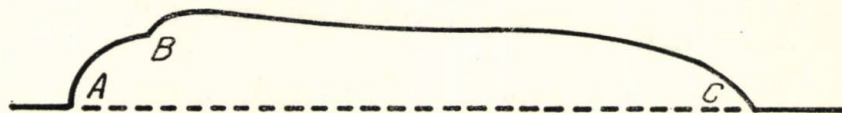


Fig. 1

Dând lui z_2 în (17) valori cuprinse între 1 și -1 putem construi arcul BC în planul fizic. În fig. 1 s-a construit profilul corespunzător lui $a = 2R$ și $b = R/2$.

Dacă după transformarea (15) în planul mișcării arcul BC se reprezintă ca un arc de cerc, notînd afixa punctului C_1 prin $R + 2a$, atunci vom putea utiliza din nou coordonatele bipolare. Trecînd la un nou plan, astfel încât axa imaginară să treacă prin mijlocul distanței BC și să fie normală pe BC ,

$$z_1 = z_2 + R + a, \quad (18)$$

și notînd ca mai sus prin β_0 unghiul dintre tangenta la arcul CB și raza $(C, -\infty)$, prin transformarea

$$z_3 = \ln \frac{a + z_2}{a - z_2}, \quad z_2 = a \operatorname{th} \frac{z_3}{2} \quad (19)$$

sintem conduși din nou la banda $\pi > y_3 > \beta_0$, $-\infty < x_3 < \infty$. Făcînd uz de (11) și (12) vom fi reduși în cele din urmă la semiplanul $y > 0$, punctele B și C corespunzînd punctelor de afixe, respectiv, -1 și 1 .

Din (15), (18), (19), (11) și (12) putem găsi pe z ca funcție de z_5 ; expresia lui z_1 în funcție de z_5 este

$$z_1 = R + a + a \operatorname{th} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi - \beta_0}{\pi} \ln \frac{1 + z_5}{1 - z_5} + i\beta_0 \right),$$

și înlocuind-o în a doua relație (15) găsim relația căutată, și deci putem scrie ecuațiile parametrice ale arcului BC , z_5 variînd pentru punctele acestui arc între -1 și $+1$.

Din aceleași relații se deduce

$$z_5 = \operatorname{th} \left[\frac{\pi}{2(\pi - \beta_0)} \left(\ln \frac{(R - z)^2}{4az - (R - z)^2} - i\beta_0 \right) \right],$$

potențialul complex în z fiind de forma $V_* z_5$.

Conturul care se construiește pe baza expresiilor de mai sus depinde de doi parametri, a și β_0 , dar dacă folosim alte reprezentări conforme, sau dacă între planele variabilelor z și z_1 intercalăm alte plane auxiliare, conturul BC va putea depinde de un număr sporit de parametri. Ca un exemplu simplu să considerăm că după ce efectuăm transformarea (15) arcul BC este încă necunoscut, dar după reprezentarea conformă a semiplanului $y_1 > 0$ minus tăietura paralelă cu Oy_1 de lungime c care se află la distanța b de origină acest arc se reprezintă ca un arc de cerc. Dacă C_1 se află în punctul de afixă $b + a$, atunci în planul z_2 în care punctele $b + 0$ și $b - 0$ vin, respectiv, în c și $-c$, și dacă presupunem în particular că B_2C_2 este un semicerc, raza se va fi

$$r = \frac{1}{2} [(a^2 + c^2)^{1/2} + (b^2 + c^2)^{1/2}], \quad (20)$$

iar centrul său se va găsi în punctul de afixă

$$S = \frac{1}{2} [(a^2 + c^2)^{1/2} - (b^2 + c^2)^{1/2}]. \quad (21)$$

Prin transformările

$$z_2 = \sqrt{(z_1 - b)^2 + c^2}, \quad (22)$$

$$z_3 = z_2 - S, \quad (23)$$

$$2z_4 = z_3 + r^2 z_3^{-1}, \quad (24)$$

arcul BC se va putea construi dînd lui z_4 valori reale cuprinse între $-r$ și r și el depinde deci de trei parametri, a , b și c .

4. Mai sus s-a făcut uz de metoda semi-inversă pentru a se obține anumite forme de corpuri alungite. Rezultate mai generale s-ar putea obține dacă se combină metoda semi-inversă cu metoda surselor. Plasînd

în ultimul semiplan, sau într-unul din planele ajutătoare, o distribuție convenabilă de surse pozitive și negative, putem obține contururi care să aproximeze cât mai bine conturul dat din planul fizic.

Aproximarea va fi cu atât mai bună cu cât vom folosi un număr mai mare de izvoare. De exemplu, în cazul particular al corpurilor alungite, putem plasa pe contur n izvoare de intensități necunoscute și, impunând ca în planul mișcării conturul să treacă prin n puncte date, obținem în general un sistem de n ecuații cu n necunoscute pentru determinarea intensităților.

Cîteva exemple simple vor arăta fecunditatea acestei metode. Să presupunem mai întâi că vrem să studiem mișcarea unui curent uniform la mari distanțe în prezența unui contur cu bord de atac apropiat de un cilindru circular. Atunci dacă în planul mișcării luăm ecuația cilindrului $|z| = R$ și plasăm pe cilindru niște surse a căror sumă este $>$ (sau pe axa reală) vom obține un corp alungit care se întinde pînă la infinit, iar dacă suma acestor surse este nulă, putem obține un corp alungit cu toate punctele la distanță finită.

O formă aparte de contur alungit am obține dacă am așeza în fața cilindrului un izvor pozitiv. Combinînd acest izvor pozitiv cu izvoare negative în spatele cilindrului, putem obține contururi alungite cu toate punctele la distanță finită. Menționăm că printr-o suprapunere convenabilă de izvoare se poate obține un contur alungit astfel ca $\lim_{x \rightarrow \infty} y = b_*$, care să conțină în interiorul său un cilindru circular. Așa a procedat. L. Sackmann, care a obținut profilul din fig. 2 folosind un potențial complex de forma

$$f(z) = V_0 \left(z + \frac{R^2}{z} \right) + A \left[\ln(z + R) - \frac{1}{2} \ln z \right],$$

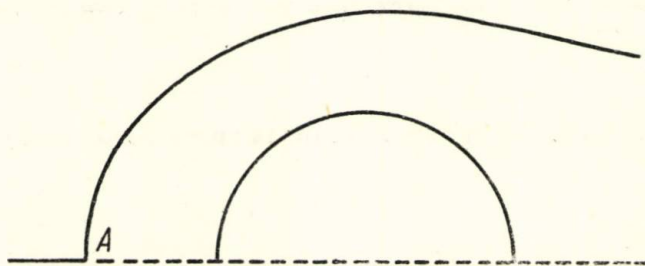


Fig. 2

rezultat din suprapunerea peste un curent uniform la mari distanțe, care se mișcă în prezența unui cilindru circular de rază R , a unui izvor pozitiv de o anumită intensitate în punctul de afixă $z = -R$ și a unui izvor negativ avînd intensitatea jumătate, plasat în centrul cilindrului ([7], p. 81).

Referindu-ne la contururile care satisfac condiția (2), să presupunem că plasăm un izvor negativ în punctul de afixă -1 și un izvor pozitiv în

punctele de afixă $z_1 = -a$, unde $a > 1$. Dacă luăm intensitățile egale, atunci ne putem aranja ca linia de curent $\psi = 0$, care va constitui conturul noului corp alungit, să treacă prin punctul $z_1 = 1$, adică în planul fizic ea va trece prin punctul B.

BIBLIOGRAFIE

1. Caius Iacob: Introduction mathématique à la mécanique des fluides, Bucarest—Paris, 1959
2. L. M. Milne—Thomson: Theoretical hydrodynamics, London, 1938.
3. Șt. I. Gheorghită: Probleme de hidrodinamică relative la exteriorul unui cilindru semi-circular, Analele Univ. Buc., nr. 13, 1937, p. 15.
4. Șt. I. Gheorghita: A semi-inverse method in plane hydrodynamics, Arch. Mech. Stos. XI, nr. 6, 1959, p. 681
5. P. F. Filciakov: Teoria filtrații pod ghidrotehniceskimi soorujeniami, Kiev, 1960
6. Ia. S. Ufliand: Bipolairnie coordonati v teorii uprugosti, Moscova, 1950
7. Louis Sackmann: L'écoulement des fluides au voisinage des points singuliers des obstacles, Thèse, Faculté des Sciences de l'Université de Strasbourg, 1936

О ПЛОСКОМ ДВИЖЕНИИ ИДЕАЛЬНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ПРИСУТСТВИИ УДЛИНЁННЫХ ТЕЛ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Показывается, как можно изучить влияние формы передней кромки полубесконечного профиля постоянной ширины на безвихревое движение идеальной несжимаемой жидкости. Затем трактуется случай ограниченного тела с полукруглой передней кромкой. Обе задачи рассматриваются полубратным методом, предложенным автором ранее.

ON THE PLANE FLOW OF PERFECT FLUIDS IN PRESENCE OF ELONGATED BODIES

SUMMARY

First it is shown how can be studied the influence of the leading edge of a semi-infinite plate of constant thickness on the irrotational motion of a perfect incompressible fluid. Then is considered the case of a body of finite length when the leading edge is a half-circle. The both problems are studied with the help of a semi-inverse method previously proposed by the author.

STUDIUL FOTOELASTIC AL UNOR PROBLEME DE CONCENTRĂRI DE TENSIUNI

T. HUIDU

1. Introducere

Studiului concentrărilor de tensiuni, care apar în plăci plane — în starea plană de tensiuni generalizată —, prevăzute cu creștături exterioare și interioare, i-au fost consacrate mai multe lucrări, atât cu caracter teoretic cât și experimental, mai ales în cazul în care creștăturile nu sînt puternic curbate.

Un studiu teoretic foarte amănunțit a fost făcut de H. Neuber [1], care a tratat o gamă destul de variată de creștături în plăci plane supuse la întindere, încovoiere (în cazul stării plane de tensiuni generalizată) și forfecare.

Experimental, prin metoda fotoelasticității, în lucrarea [2] este prezentat un studiu despre influența reciprocă a orificiilor și creștăturilor circulare asupra concentrației tensiunilor, în comparație cu rezultatele teoretice respective. De asemenea, un studiu experimental al concentrației tensiunilor în cazul întinderii pure la o problemă practică de sudură prin eclise, a fost făcut în lucrarea [3].

Deși nu se ocupă în mod direct de problema concentrărilor de tensiuni, lucrările [4,5] pun în evidență faptul că la forfecarea pură, care se obține pentru o anumită solicitare și formă a piesei, nu mai apar concentrări de tensiuni la colțurile creștăturilor unghiulare, așa cum apar pentru aceeași formă a piesei la întindere și încovoiere [6].

După cum se știe din lucrarea [1], Neuber prezintă și câteva formule practice pentru calculul coeficientului de concentrație. Astfel, dacă se consideră placa supusă la întindere uniformă — cazul corpului elastic linear —, cu două creștături dispuse simetric în raport cu una din axele ei (fig. 1), și dacă creștăturile nu sînt puternic curbate, atunci coeficientul de concentrație este dat de expresia :

$$\alpha_1 = \frac{2 \left(\frac{b-a}{\rho} + 1 \right) \sqrt{\frac{b-a}{\rho}}}{\left(\frac{b-a}{\rho} + 1 \right) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{b-a}{\rho}} + \sqrt{\frac{b-a}{\rho}}} \quad (1)$$

unde ρ este raza de curbura în fundul creștăturii, iar $2(b - a)$ este lățimea secțiunii minime.

Formule analoge sînt date și pentru cazul încovoierii și forfecării pure, întrucît experimental ne ocupăm numai de cazul compresiunii pure — ceea ce din punct de vedere principal este același lucru cu întinderea pură — ne vom referi în special la acest din urmă caz.

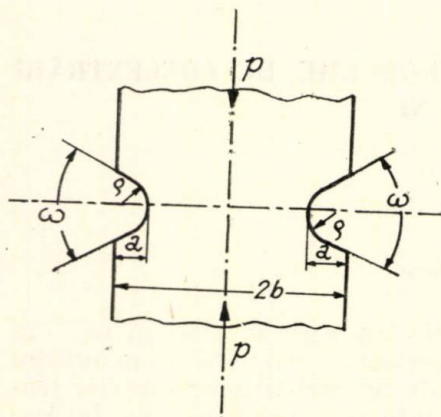


Fig. 1. — Creștăturile bilaterale cu raza de curbura ρ relativ mare

Un fapt foarte important de remarcat este acela că formula (1) pentru determinarea coeficientului de concentrație își pierde valabilitatea atunci cînd avem de-a face cu creștături cu raze de curbura ρ foarte mici, așa cum este cazul în studiul de față. Pentru a ne da seama mai ușor de acest lucru, este necesar să amintim condițiile și ipotezele în care au fost deduse formulele de tipul celei notate cu (1).

Se știe că în cazul teoriei clasice a elasticității, la stabilirea ecuațiilor fundamentale ale acesteia, s-a folosit

ca model de reprezentare un element de volum $d\tau$. Cu acest prilej s-a admis ipoteza mediului continuu (s-a admis în mod tacit ipoteza divizibilității infinite a materiei, neținîndu-se seama de structura acesteia).

Atîta timp cît este vorba de un contur cu curbura mică, sau — mai precis vorbind — dacă raza de curbura a conturului este suficient de mare în comparație cu cristalele materiei, ipotezele teoriei clasice a elasticității sînt acceptabile, deoarece în acest caz tensiunile, depinzînd de condițiile pe contur, suferă o schimbare considerabil de mare numai în limitele unor domenii mari. De aceea, la o curbare slabă a suprafeței laterale, structura materiei nu influențează asupra distribuției tensiunilor și, prin urmare, asupra coeficientului de concentrație.

Cu totul altfel stau lucrurile la contururi puternic curbate (cu rază de curbura mică). În acest caz, se observă că, dacă raza de curbura $\rho \rightarrow 0$, formulele (1) deduse în cazul teoriei clasice, pentru coeficientul de concentrație, conduc la valori infinite, lipsite de sens. Teoretic această situație se poate explica prin aceea că în cazul conturilor puternic curbate ale creștăturilor unghiulare, au loc modificări importante ale tensiunilor chiar și în limitele unor domenii foarte mici (în imediata vecinătate a vârfului creștăturii). Aplicînd teoria clasică în acest caz, al creștăturilor cu raze de curbura foarte mici, ar însemna să ignorăm structura materiei și în cazul domeniilor mici de ordinul cristalului, ceea ce ar contrazice existența însăși a cristalului. Din această cauză, fără a se renunța complet la vechea teorie, pentru creștăturile cu raze de curbura foarte mici, se folosește o teorie nouă, considerîndu-se ca model de reprezentare, în locul unui element de volum $d\tau$, un element de mărime finită ε .

Pe scurt, ideea determinării teoretice a coeficientului de concentrație în creștături unghiulare constă în următoarele. Se pornește de la rezolvarea problemei cu ajutorul teoriei clasice a elasticității și presupunându-se că distribuția tensiunilor pentru raza de curbură variabilă a creștăturii a fost găsită, la fundul creștăturii se folosește mai departe noul model de rerezenta-re, luând acolo o porțiune de lățime, ε . Această porțiune este atât de mică, încât tensiunea, care acționează pe ea, se poate considera constantă, iar noile valori ale tensiunii se obțin prin medierea vechilor valori pe suprafața porțiunii considerate.

Această teorie duce, în locul relațiilor diferențiale d'n cadrul vechii teorii, la relații în diferențe finite.

Trebuie menționat că teoria lui Neuber (noul mod de reprezentare) se aplică într-un domeniu mic, din jurul vârfului creștăturii unghiulare, unde au loc schimbări bruște de tensiuni, în restul domeniului — unde există o schimbare lină a tensiunii, și unde metoda diferențelor este anevoioasă — rămâne valabilă vechea teorie.

Din cele spuse mai sus reiese că la piese prevăzute cu creștături unghiulare, o influență demnă de luat în considerație asupra coeficientului de concentrație, o exercită și structura materialului. În acest caz, expresia coeficientului de concentrație căutat, în zona unghiului ascuțit a creștăturii este dată de :

$$\alpha = 1 + \frac{\alpha_1 - 1}{1 + \frac{\pi}{\pi - \omega} \sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}} \quad (2)$$

unde α_1 este coeficientul de concentrație determinat după formula (1), în cazul teoriei clasice, ω este unghiul creștăturii (fig. 1) iar ρ' este o rază de curbură limită oarecare, reprezentînd jumătate din mărimea părții elementare $\left(\rho' = \frac{\varepsilon}{2}\right)$ considerată în calcul și care depinde de structura materialului. Adică ρ pentru diferite materiale capătă valori diferite (de exemplu, pentru oțel $\rho' \approx 0,5$ mm), reprezentînd o nouă constantă a materialului. Ea se mai numește și sensibilitate elastică a creștăturii și are dimensiunea unei lungimi. Cazul $\rho' = 0$, corespunde materialului ideal, cu cea mai mare sensibilitate elastică. La creșterea lui ρ' sensibilitatea dispare.

În afară de cele spuse mai sus, trebuie să mai amintim că la deducerea ecuațiilor fundamentale ale teoriei elasticității, în cazul teoriei clasice, s-a avut în vedere o astfel de deformare care provoacă o schimbare a formei atât de mică, încît aceasta poate fi practic neglijabilă. Din această cauză, atunci cînd s-au dedus ecuațiile de echilibru, a fost posibil să se pună la bază starea corpului pînă la deformare. Unii autori au arătat experimental că pentru creștături, ale căror deformări sînt mari, adică pentru care coeficientul de concentrație și curbura creștăturii sînt mari, această ipoteză nu mai este acceptabilă.

Ținându-se seama de toate acestea și aplicînd noua teorie se poate obține o micșorare a coeficientului de concentrație al creștăturii puternic curbate.

2. Coeficientul de concentrație

Deși noțiunea de coeficient de concentrație e cunoscută [1, 3], ea fiind reprezentată matematic de raportul dintre componenta maximă a tensorului tensiune în punctul de concentrare $\sigma_{\max}$, și tensiunea așa-zisă nominală σ_n adică :

$$\alpha = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n} \quad (3)$$

totuși, anumite precizări sînt necesare aproape de fiecare dată, cînd se studiază o problemă legată de concentrația tensiunilor. Precizările se impun a fi făcute mai ales în privința considerării tensiunii nominale, pentru a cărei determinare trebuie să se indice întotdeauna procedeul folosit, atît atunci cînd se rezolvă problema pe cale teoretică, dar mai ales cînd rezolvarea ei se face pe cale experimentală, prin metoda optică.

Una din precizări se referă la faptul, dacă tensiunea nominală este raportată la secțiunea totală a plăcii plane, sau la secțiunea plină cea mai mică a aceleiași plăci.

Unii autori, de exemplu Neuber [1], consideră ca tensiune nominală tensiunea medie raportată la secțiunea totală a plăcii, în cazul creștăturilor de adîncime mică, iar în cazul creștăturilor de adîncime mare, tensiunea respectivă se consideră raportată la secțiunea plină cea mai mică.

În lucrarea de față, avînd în vedere faptul că dorim să studiem — printre altele — variația coeficientului de concentrație la schimbarea lățimii secțiunii mici $2(b-a)$ (fig. 2), vom considera ca tensiune nominală, tensiunea medie raportată la secțiunea plină cea mai mică corespunzătoare. Deci, pentru diferite adîncimi ale creștăturii, vor rezulta diferite valori pentru tensiunea nominală, care corespund diferitelor secțiuni transversale minime.

Se știe că la calculul teoretic al coeficientului de concentrație, atît componenta maximă a tensiunii, cît și tensiunea nominală, sînt obținute prin calcul analitic. Metoda fotoelasticității de obținere a aceluiași coefi-

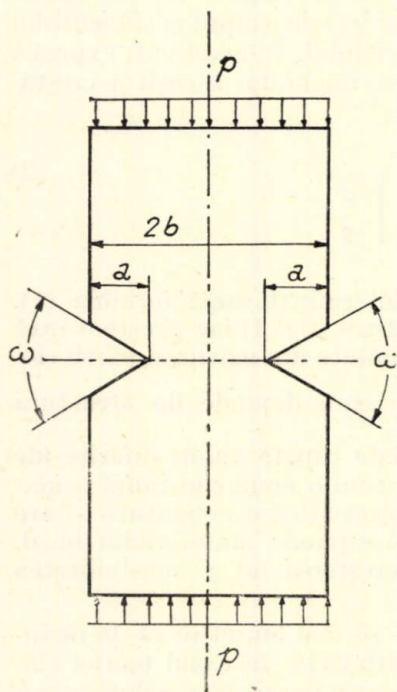


Fig. 2. — Creștăturile bilaterale unghiulare

cient, constă în obținerea datelor respective, fie direct din experiențe — pe contururile lipsite de sarcini exterioare —, fie analitic prin metoda diferenței tensiunilor tangențiale a lui Frocht, folosind însă și datele obținute experimental — în interior.

În lucrarea aceasta, în cazul unei compresiunii uniforme (fig. 2), pentru calculul coeficientului de concentrație, vom folosi datele obținute direct din experiențe, astfel că din punct de vedere fotoelastic — după cum a fost arătat și în lucrarea [3] — coeficientul de concentrație este dat de relația :

$$\alpha = \frac{k_{\max}}{k_n} \quad (4)$$

unde $k_{\max}$ este un număr, întreg sau fracționar, care reprezintă ordinul maxim al izocromaticii în punctul de concentrație a tensiunilor ; iar k_n este un număr, întreg sau fracționar, reprezentînd ordinul izocromaticii corespunzătoare tensiunii nominale definită mai sus. Aceasta din urmă se determină pentru aceeași solicitare ca și în cazul determinării lui $k_{\max}$, însă se raportează la secțiunea îngustă respectivă. Dacă, de exemplu, înainte de practicarea creștăturii bilaterale (fig. 2) am stabilit că pentru o anumită sarcină uniform distribuită, ordinul izocromaticii este k_0 , atunci pentru secțiunea 2 ($b - a$), la aceeași încărcare, ordinul izocromaticii va fi dat de relația :

$$k_n = k_0 \cdot \frac{b}{b - a} \quad (5)$$

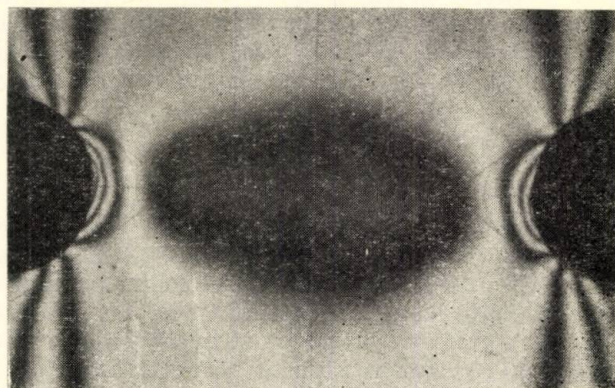
Facem observația că această metodă de calcul a coeficientului de concentrație este valabilă în cazul problemei de față a plăcilor plane cu creștături bilaterale (și în alte câteva cazuri de creștături, orificii etc.), supuse la o sarcină de compresiune uniform distribuită după o direcție paralelă cu segmentul de lățime 2 ($b - a$), care unește vîrfurile creștăturilor (fig. 2). În cazul fenomenelor de încovoiere și forfecare pură — după cum se va vedea cu altă ocazie — se aplică metode diferite de aceasta pentru calculul pe cale experimentală a coeficientului de concentrație.

3. Rezultate experimentale

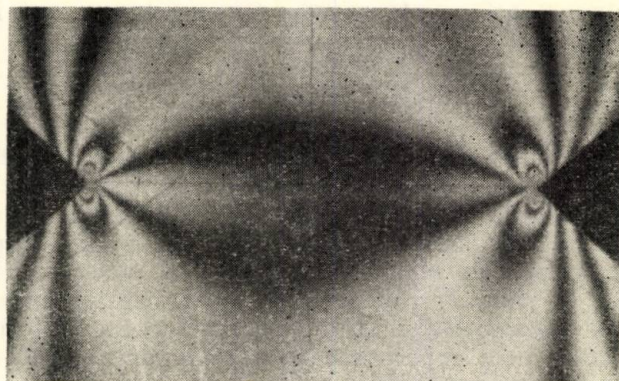
Experiențele s-au efectuat pe modele de forme și solicitări arătate pe figurile 1—6, decupate din plăci turnate în laboratorul nostru, cu concursul tovarășului Mîndru Ilie, asistent la Facultatea de Chimie. S-a luat ca bază o rășină epoxidică, produs al fabricii „Getica” din București, iar ca întăritor s-a folosit anhidridă maleică : cca 25 părți anhidridă maleică la 100 părți de rășină. Detaliile în legătură cu această problemă depășeșc cadrul acestei lucrări.

În prezenta lucrare ne ocupăm de studiul fotoelastic al concentrațiilor de tensiuni produse la o solicitare de compresiune uniformă — în limitele elasticității —, în cazul creștăturilor bilaterale unghiulare (fig. 2, 5, și 6).

Înainte de a trece la tratarea acestui caz, pentru care s-a consacrat cea mai mare parte a studiului, au fost studiați comparativ câțiva coeficienți de concentrație pentru aceeași adâncime a creștăturilor, forma acestora din urmă fiind însă diferită. Pentru $a = \rho = 10$ mm, $b = 25$ mm,



a



b

Fig. 3. — Izocromatele

- a) creștăturile bilaterale semicirculare : $\rho = a = 10$ mm ;
 $b = 25$ mm și coeficientul de concentrare $\alpha = 1,93$.
 b) creștăturile bilaterale unghiulare : $a = 10$ mm ; $b = 25$ mm,
 $\omega = 80^\circ$ și $\alpha = 3,85$

în cazul creștăturii circulare s-a obținut $\alpha = 1,93$, iar în cazul creștăturii unghiulare, pentru $a = 10$ mm, $b = 25$ mm, $\omega = 80^\circ$ s-a obținut $\alpha = 3,85$ (fig. 3). Se observă de aci o creștere considerabilă a coeficientului de concentrație la creștătura unghiulară față de creștătura circulară.

De asemenea s-a studiat, pentru un unghi $\omega = 60^\circ$ fix, influența micșorării razei de curbura asupra mărimii coeficientului de concentrație. Rezultatele experimentale sînt reproduse în fig. 4, unde în afară de cîteva

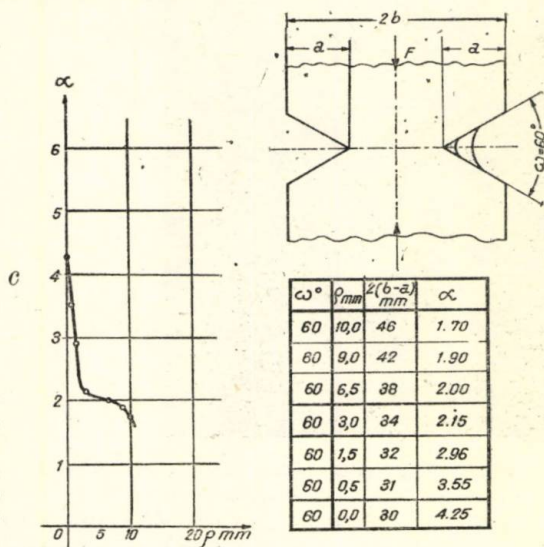
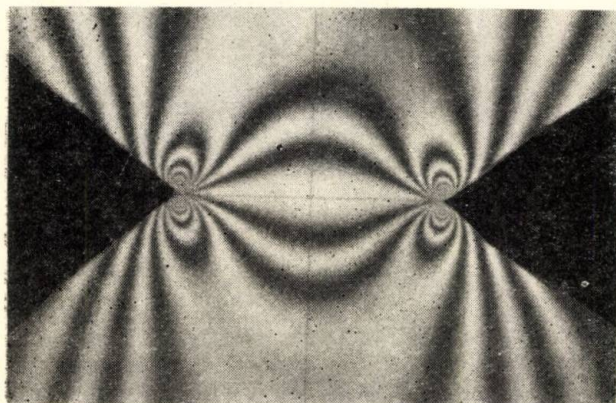
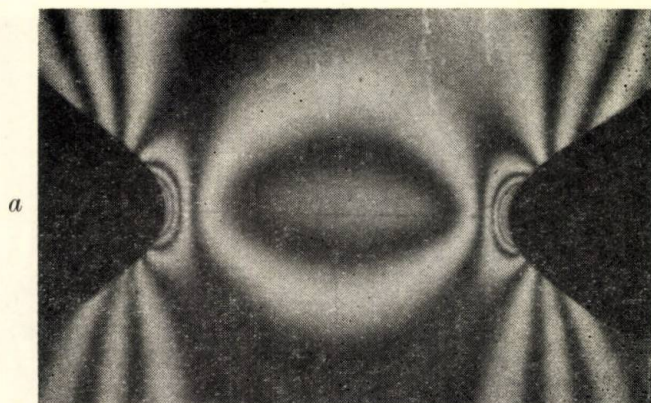


Fig. 4. — Variația coeficientului de concentrare la modificarea razei de curbura în fundul creștăturii.

a) și *b*) Izocromatele în două cazuri diferite;
c) Graficul de variație a coeficientului de concentrare și tabelul de valori obținute experimental

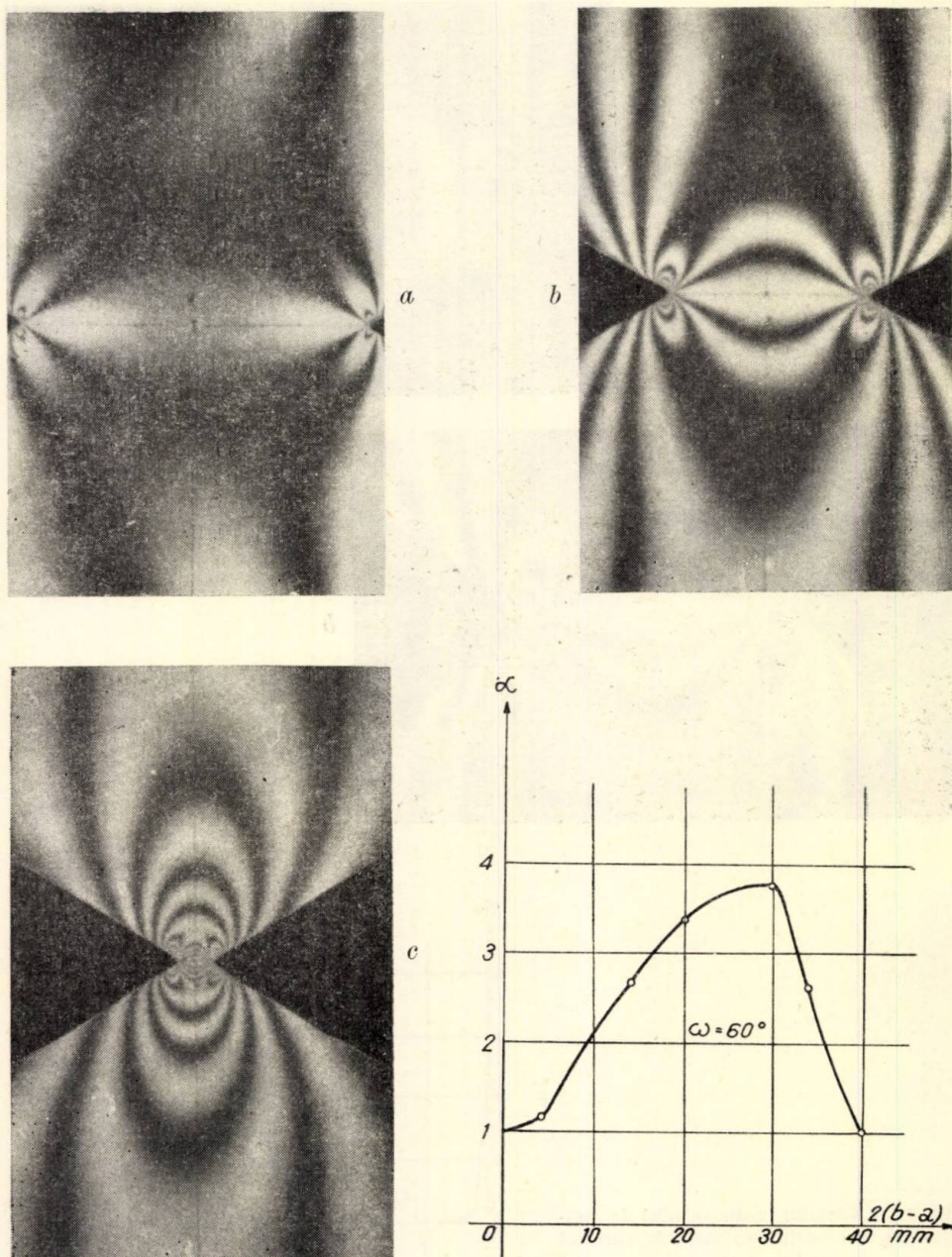


Fig. 5. — Variația coeficientului de concentrare α la unghiuri constante ($\omega = 60^\circ$) ale creștăturilor bilaterale și $2(b-a)$ = variabil.

a), b), c). Izocromatele pentru $2(b-a) = 34; 20; 4$ mm.

d) Curba de variație a lui α .

din fotografiile obținute experimental, este prezentat și graficul de variație al coeficientului de concentrație α în funcție de schimbarea razei de curbura. S-a plecat de la $\rho = 10$ mm, dându-se valori tot mai mici până la $\rho = 0$, și s-au obținut valorile extreme respective $\alpha = 1,70$ și $\alpha = 4,25$. Trebuie făcută observația că — așa cum arată și tabela din fig. 4 — în afară de raza de curbura ρ , o influență asupra coeficientului de concentrație a mai exercitat și variația secțiunii 2 ($b-a$). Datorită faptului că influența acesteia din urmă este mică, în acel interval, în raport cu influența lui ρ , am indicat-o numai în tabelă, nu și în grafic. În afară de aceasta ar mai fi de observat că raza de curbura $\rho = 0$ este foarte greu, sau chiar imposibil, de realizat din punct de vedere practic. Rezultă de aci că și valoarea coeficientului de concentrație, pentru $\rho = 0$, este discutabilă, în realitate ea fiind mai mare decât cea obținută de noi. De altfel, deficiențele întâlnite la rezolvarea teoretică a problemei și despre care am vorbit în introducere, se fac prezente și aici.

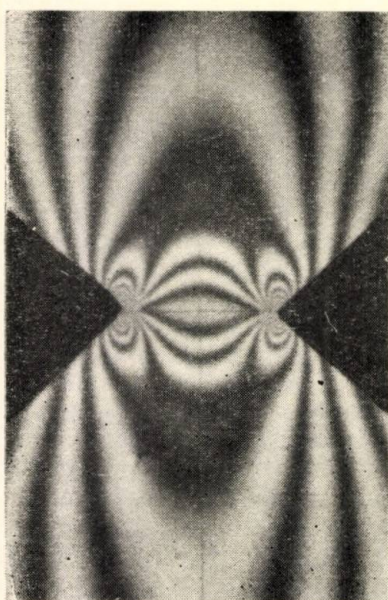
În continuare am făcut un studiu al coeficientului de concentrație în cazul unei plăci plane prevăzută cu creștături unghiulare bilaterale, supusă la o compresiune uniformă (fig. 2). S-a considerat cazul creștăturii bilaterale cu $\omega = \text{const.} = 60^\circ$ și 2 ($b-a$) variabil (fig. 5) și cazul 2 ($b-a$) = const. și ω variabil (fig. 6).

Cînd unghiul este constant, iar distanța dintre vîrfurile creștăturilor variază micșorîndu-se continuu, coeficientul de concentrație crește începînd de la valoarea 1 (pentru placa fără creștătură) pînă la valoarea limită aproximativă $\alpha = 3,76$ (pentru 2 ($b-a$) = 30 mm, $\omega = 60^\circ$), iar după aceea scade apropiîndu-se din nou de valoarea 1 (cînd 2 ($b-a$) = 0).

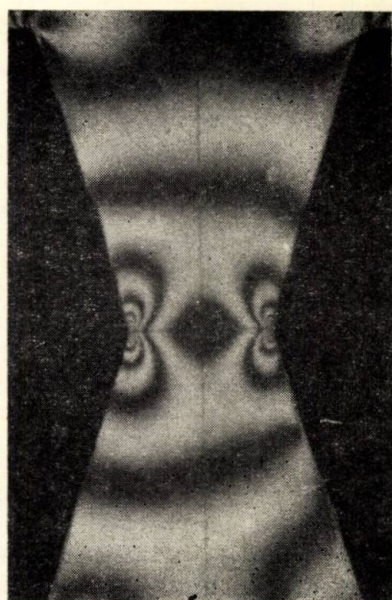
Pentru creștăturile unghiulare o mare importanță o capătă mărimea unghiului de inclinare ω . Dacă creștăturile au raza de curbura mare, influența unghiului de inclinare asupra mărimii coeficientului de concentrație poate fi neglijată (fig. 4) — lucru care a fost confirmat cu prilejul experiențelor efectuate, chiar și prin observații directe —, deoarece partea de linie dreaptă a frontierei se află relativ departe de limitele zonei de tensiune maximă. Alta este situația în cazul creștăturilor puternic curbate și a creștăturilor cu unghiuri ascuțite. Aici mărimea unghiului ω joacă un rol esențial, așa cum se observă și din experiențe (graficul din fig. 6). Cînd distanța dintre vîrfurile creștăturilor se consideră constantă, iar unghiul variază (de la 30° la 180°), valoarea coeficientului de concentrație crește de la 2,75 (pentru $\omega = 30^\circ$) pînă la 3,57 (pentru $\omega = 90^\circ$), iar după aceea scade continuu pînă la valoarea 1 (pentru $\omega = 180^\circ$).

Așa numita lege a amortizării enunțată în lucrarea [1] spune următoarele: „Creșterea bruscă a tensiunilor, în cazul problemelor de concentrări de tensiuni, este însoțită de micșorarea considerabilă a tensiunilor la o relativă depărtare de zona de concentrare. Cu cît este mai mare tensiunea maximă în locul concentrării, cu atît mai ușor se poate observa amortizarea tensiunilor la o depărtare relativă de zona supratensionată”.

Această lege și-a găsit o confirmare și în rezultatele experimentale din această lucrare. S-a observat că, dacă în placa plană fără creștătură există o stare uniformă de tensiuni, atunci prin construirea unei creștături cu adîncime mică, aceasta din urmă, atrage după ea — în virtutea



a



b

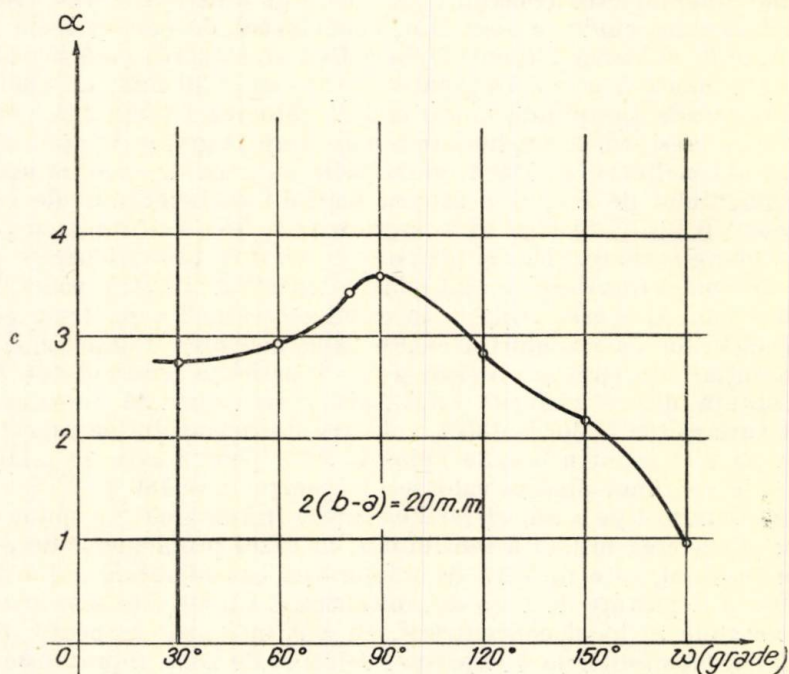


Fig. 6. — Variația coeficientului de concentrare la modificarea unghiului creștăturilor bilaterale, iar distanța între virfurile creștăturilor $2(b-a) = \text{const.} = 20 \text{ mm}$.

a) și b) Izocromatele pentru $\omega = 60^\circ$ și $\omega = 150^\circ$.

c) Curba de variație a coeficientului de concentrare α obținută experimental.

legii amortizării — o perturbare a cîmpului de tensiuni numai în imediata vecinătate de vîrfurile creștăturii; la suficientă depărtare de creștătură starea de tensiune — înainte ca și după construirea creștăturii — rămîne uniform distribuită. De aci rezultă că parametrii care influențează asupra coeficientului de concentrație în creștătura de adîncime mică sînt adîncimea a și raza de curbura ρ . Lățimea plăcii $2(b-a)$ nu influențează sensibil coeficientul de concentrație în creștătura cu adîncime mică (fig. 5 de sus). Dacă este vorba de creștături foarte adînci (fig. 5), atunci perturbarea cîmpului de tensiuni are loc pe toată secțiunea transversală cea mai îngustă a plăcii, iar coeficientul de concentrație depinde de lățimea $2(b-a)$ și de raza de curbura ρ . Adîncimea creștăturii nu mai influențează. Cînd lățimea $2(b-a)$ se micșorează mult, atunci în această secțiune se realizează o stare de tensiuni uniformă.

O ultimă concluzie care se desprinde din observațiile făcute experimental este aceea că, în timp ce la creștăturile cu curbura mai mică concentrarea tensiunilor are loc pe fundul creștăturii, la creștăturile unghiulare concentrările apar de o parte și de alta a punctului unghiular.

Importanța practică a studiului concentrărilor de tensiuni este atât de mare încît nu mai insistăm asupra ei, ci numai o subliniem, amintind că aproape nu există piese sau detalii de construcții (de mașini, civile, miniere etc.), care să nu conțină orificii sau creștături, sau și una și alta. După cum am arătat mai sus, un studiu concret al unei astfel de probleme a fost făcut în lucrarea [3].

BIBLIOGRAFIE

1. H. Neuber: Kerbsspannungslehre — Springer Verlag — Berlin, Göttingen-Heidelberg, 1958.
2. R. D. Vaganov, O. I. Șisorina și L. A. Hripina: Uprugaia conțențrația napriajenii pri vzaimnom vlianii Vrezov i otverstii., Polarizationno — opticeschii metod issledovania napriajenii", Izd. Leningradskovo Universiteta, 1960.
3. T. Huidu: Studiul fotoelastic al concentrărilor de tensiuni produse în cazul unor probleme practice de îmbinare prin sudură cu eclise. Analele Univ. București, Seria Științele Naturii, Matematică-Fizică nr. 40, XII, 1963.
4. N. Iosipescu și T. Huidu: Studiul fotoelastic asupra repartiției tensiunilor tangențiale la un procedeu nou de încercare la forfecare pură, Anal. Univ. București, Seria Științele Naturii, Matem.-Fizică nr. 40, XII, 1963.
5. N. Iosipescu: Cercetări fotoelastice asupra unui procedeu corect de încercare la forfecare pură a materialelor. Studii și Cercetări de mecanică aplicată nr. 2, XIII, 1962.
6. N. Iosipescu: Considerații asupra unei soluții practice a problemei forfecării pure stabilită pe cale fotoelastică. Analele Univ. București Seria Științele Naturii, Matem. Fizică nr. 39, XII, 1963.

ФОТОУПРУГОЕ ИЗУЧЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ КОНЦЕНТРАЦИЙ НАПРЯЖЕНИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе автор изучает методом фотоупругости концентрации напряжений возникающих при плоском напряжённом состоянии, когда сжатие однородно по определённому направлению (рис. 2). Рассматриваются две выточки, расположенные симметрично по отношению к одной из осей пластинки.

Делается фотоупругое изучение влияния на коэффициент концентраций: изменения формы выточки (рис. 3); уменьшение радиуса кривизны выточки (рис. 4); угловая выточка, когда минимальное поперечное сечение изменяется, а угол $\omega = \text{const}$ (рис. 5); а также когда угол ω изменяется, но минимальное поперечное сечение остаётся постоянным (рис. 6).

ÉTUDE PHOTOÉLASTIQUE DE CERTAINS PROBLÈMES DE CONCENTRATION DES CONTRAINTES

R É S U M É

Le travail présente l'étude des concentrations de contraintes, qui apparaissent dans les plaques planes, en état plan élastique généralisé de tensions, pour une sollicitation de compression uniforme, le long d'une direction déterminée (fig. 2).

On considère deux entailles symétriquement disposées en rapport d'une des axes de la plaque.

On expose ici l'étude photoélastique de l'influence exercée sur le coefficient de concentration, du par :

- la modification de la forme d'entaille (fig. 3).
- la diminution du rayon d'entaille (fig. 4).
- l'entaille angulaire, lorsque la section transversale minime se modifie, tandis que l'angle $\omega = \text{const}$ (fig. 5).
- l'entaille angulaire, lorsque l'angle ω se modifie, tandis que la section transversale minime reste constante (fig. 6).

ASUPRA ECUAȚIEI LUI LEDERER

T. POSTELNICU și N. BONCIOCAT

După cum se știe, emulsiile lichid-lichid sînt sisteme disperse care se compun dintr-un lichid dispersat într-un alt mediu de dispersiune lichid. Pentru obținerea unei astfel de emulsii se supun două lichide nemiscibile unor operații ce urmăresc dispersarea unuia în celălalt (prin scuturare mecanică, presare prin orificii înguste etc.). Unul din lichide obține astfel o dispersare mai mare și el constituie atunci faza dispersă, iar celălalt se numește mediu de dispersiune.

O emulsie nu rămîne stabilă în timp, procesul de distrugere al ei petrecîndu-se de la sine, întrucît sistemul cu un grad mai mare de dispersiune și deci cu o energie superficială mare, trece într-un sistem cu grad de dispersiune din ce în ce mai mic, energia superficială liberă scăzînd. Substanțele care stabilizează emulsiile sînt emulgatorii. Ei scad tensiunea superficială a substanței de emulsionat, micșorînd deci energia liberă a sistemului. Se disting două tipuri de emulsii în funcție de care fază lichidă dizolvă mai bine emulgatorul, și anume :

1. Dacă emulgatorul are însușiri hidrofile (de exemplu săpunuri alcaline și Tween 20) se obține emulsia uleiului în apă, apa fiind mediu de dispersiune ;

2. Dacă emulgatorul are însușiri hidrofobe (de exemplu săpun de Ca) se obține tipul de emulsie apă în ulei, în care caz uleiul este mediul de dispersiune.

Am menționat mai sus că emulsiile se distrug cu timpul. La aceasta contribuie două fenomene : *a*) particule sferice ale lichidului celui mai ușor se ridică la suprafață, producîndu-se astfel separarea părții disperse ; *b*) particulele astfel separate se contopesc într-o masă continuă de lichid, ducînd la fenomenul de coalescență.

Prima încercare de a stabili legile cantitative de distrugere a emulsiilor a fost făcută de E. L. Lederer [1], care a stabilit următoarea ecuație diferențială bazată pe considerații cinetice :

$$\frac{dv}{dt} = K (1 - v) \sqrt{v} \quad (1)$$

unde $1 - v$ este volumul uleiului rămas încă nestratificat la timpul t , v — volumul uleiului stratificat exprimat procentual, considerînd întreg vo-

lumul drept unitate, iar K este constanta de viteză a stratificării fazelor, care măsoară deci stabilitatea emulsiilor. Integrala ecuației (1) cu condiția inițială $v(t=0) = 0$ este :

$$K = \frac{1}{t} \ln \frac{1 + \sqrt{v}}{1 - \sqrt{v}} \quad (2)$$

iar pentru calcule se folosește constanta $k = \frac{K}{2,303}$, când expresia (2) devine :

$$k = \frac{1}{t} \log \frac{1 + \sqrt{v}}{1 - \sqrt{v}} \quad (3)$$

Această relație s-a verificat experimental în numeroase cazuri, dar numai acolo unde timpul de separare a fazelor nu era prea mare [2]. În studiul problemei emulsiilor menționăm cercetările efectuate de A. V. Dumanschi [3] și I. Mokrușin [4].

În cercetările de laborator efectuate la catedra de chimie fizică de la Facultatea de Farmacie din I.M.F. București, D. Ștefănescu și N. Tüchel au constatat că relația (3) nu mai este valabilă când ne apropiem de sfârșitul separării [5].

În lucrarea de față, folosind date experimentale de la catedra menționată și utilizând analiza de regresie și de varianță se dă o nouă expresie pentru constanta k , în acord cu datele experimentale. De asemenea, se obține ecuația diferențială corespunzătoare pentru valoarea k găsită.

* * *

Dintre determinările efectuate, ale căror rezultate nu se supun legii date de Lederer, adică pentru care k nu rămâne constant, am considerat

TABELUL Nr. 1

V	t	v	k	V	t	v	k
1	6	0,02	0,0205	10	51	0,20	0,0082
2	13	0,04	0,0135	11	57	0,22	0,0077
3	17	0,06	0,0128	12	63	0,24	0,0074
4	20	0,08	0,0126	13	68	0,26	0,0072
5	25	0,10	0,0114	14	75	0,28	0,0068
6	30	0,12	0,0104	15	81	0,30	0,0066
7	35	0,14	0,0097	16	87	0,32	0,0064
8	41	0,16	0,0090	17	94	0,34	0,0062
9	46	0,18	0,0085				

cazul emulsiei de acid oleic — soluție Tween 0,5%, ambele în volume de 25 ml. În tabelul 1 sînt trecute pe coloane următoarele : volume V în ml

de ulei separat ; timpul t de separare ; volumele v exprimate în procente ($V = 100 v$) ; constanta k calculată după (3).

După cum se vede valorile lui k scad pe măsură ce volumul v crește. Reprezentînd grafic dependența lui k de v , folosind pe rînd rețea uniformă, semilogaritmică și dublulogaritmice, am constatat cea mai bună apropiere de coliniaritatea tuturor punctelor în cazul rețelei dublulogaritmice. Aceasta ne-a îndreptățit să trecem la utilizarea unei analize de regresie și varianță pentru obținerea relației de dependență între k și v care să corespundă cel mai bine cu datele experimentale.

În tabelul 2 sînt prezentate calculele necesare analizei de regresie, unde am notat :

În tabelul 2 sînt prezentate calculele necesare analizei de regresie, unde am notat :

$$x = \log 10^2 v, \quad y = \log 10^3 k \quad (4)$$

TABELUL Nr. 2

x	y	x^2	y^2	xy
0,301	1,312	0,0906	1,7161	0,3949
0,602	1,130	0,3624	1,2769	0,6803
0,778	1,107	0,6053	1,2321	0,8612
0,903	1,100	0,8541	1,2100	0,9933
1,000	1,057	1,0000	1,1236	1,0570
1,079	1,017	1,1642	1,0404	1,0973
1,146	0,987	1,3133	0,9742	1,1311
1,204	0,954	1,4496	0,9101	1,1486
1,255	0,924	1,5750	0,8630	1,1596
1,301	0,914	1,6926	0,8354	1,1891
1,342	0,886	1,8010	0,7850	1,1890
1,380	0,869	1,9044	0,7552	1,1992
1,415	1,857	2,0022	0,7340	1,2127
1,447	0,833	2,0938	0,6939	1,2054
1,477	0,820	2,1815	0,6724	1,2111
1,505	0,806	2,2650	0,6496	1,2130
1,531	0,792	2,3440	0,6273	1,2126
19,666	16,370	24,6603	16,0996	18,1554

Se știe [6] că ecuația drepte de regresie a lui y în x este :

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad (5)$$

unde

$$x_0 = \frac{S(x)}{N}, \quad y_0 = \frac{S(y)}{N}, \quad m = \frac{[xy]}{[x^2]} \quad (6)$$

în care N este numărul determinărilor, prin S s-a notat suma valorilor variabilei din paranteză, iar :

$$\begin{aligned} [x^2] &= S(x^2) - \frac{S^2(x)}{N} \\ [y^2] &= S(y^2) - \frac{S^2(y)}{N} \\ [xy] &= S(xy) - \frac{S(x)S(y)}{N} \end{aligned} \quad (7)$$

În cazul datelor din tabelul 2, calculul cantităților date de (6) și (7) a condus la ecuația drepte de regresie :

$$y = 1,441 - 0,413 x \quad (8)$$

Pentru aprecierea preciziei acestei drepte de regresie s-a efectuat o analiză de varianță prezentată în tabelul de mai jos :

TABELUL Nr. 3

Sursa varianței	Grade de libertate	Sume de pătrate	Rapoarte	F
Panta dreptei de regresie Variația față de dreaptă	1 15	$B^2 = 0,3247$ $A^2 = 0,01115$	$s_2^2 = 0,3247$ $s_1^2 = 0,00077$	4 22
Total față de medie Media y_0	16 1	$[y^2] = 0,3362$ $C = 15,7634$		
Total	17	$S(y^2) = 16,0996$		

În acest tabel s-a notat :

$$\begin{aligned} B^2 &= \frac{[xy]^2}{x^2}, & A^2 &= [y^2] - B^2, & C &= \frac{S^2(y)}{N} \\ s_1^2 &= \frac{A^2}{n_1}, & s_2^2 &= \frac{B^2}{n_2}, & F &= \frac{s_2^2}{s_1^2} \end{aligned}$$

unde n_1 , n_2 sînt numărul gradelor de libertate pe liniile respective din tabel. Valoarea lui F , astfel obținută, comparată cu valoarea teoretică a acestui parametru din tabelele corespunzătoare repartiției sale, la pragul de 1%, care este $F = 8,68$, arată o semnificație deosebită în cazul nostru, dovedind astfel că relația între k și v este într-adevăr de tipul funcției putere.

În tabela 4 prezentăm comparativ rezultate similare obținute în următoarele cazuri :

I. Datele din tabela 1 cu rețea dublu logaritmică

II. Datele din tabelul 1 cu rețea dublu logaritmică, excluzând valoarea pentru $V = 1$

III. Datele din tabelul 1 cu rețea semilogaritmică, excluzând valoarea pentru $V = 1$

În acest tabel λ este parametrul lui Gaddum dat de $\lambda = s_1/m$. După cum se vede, tratarea în cazul I este mai eficientă decât în celelalte cazuri.

TABELUL Nr. 4

Cazul	F	λ
I	422	0,067
II	122	0,09S
III	111	3,3

Menționăm că în cazurile II și III am exclus din calcule valoarea corespunzătoare lui $V = 1$, deoarece în reprezentarea semi logaritmică apare ca aberantă.

Din (4) și (8) avem :

$$\log 10^3 k = 1,441 - 0,413 \log 10^2 v$$

care ne dă

$$k = 0,00412 v^{-0.413} \quad (9)$$

Prin urmare, pentru cazul studiat valoarea constantei lui Lederer în acord cu datele experimentale ar trebui să fie :

$$k' = k v^{0.413} = 0,00412 \quad (10)$$

care, ținând seama de (4), se mai poate scrie :

$$k' = \frac{v^{0.413}}{t} \log \frac{1 + \sqrt{v}}{1 - \sqrt{v}} \quad (11)$$

Valabilitatea formulei (11) pentru cazul emulsiei acid oleic — soluție Tween 0,5% și 1% reiese din tabelul 5, dacă se compară valorile pentru k și k' .

TABELUL Nr. 5

a) Soluție Tween 0,5%

b) Soluție Tween 1%

v	k	k'	v	k	k'
0,02	0,0205	0,00408	0,32	0,0123	0,00245
0,04	0,0135	0,00357	0,34	0,0070	0,00219
0,06	0,0128	0,00400	0,02	0,0060	0,00217
0,08	0,0126	0,00444	0,06	0,0053	0,00205
0,10	0,0114	0,00440	0,08	0,0048	0,00193
0,12	0,0104	0,00418	0,10	0,0045	0,00200
0,14	0,0097	0,00431	0,12	0,0043	0,00202
0,16	0,0090	0,00422	0,14	0,0041	0,00202
0,18	0,0085	0,00419	0,16	0,0039	0,00201
0,20	0,0082	0,00422	0,18	0,0037	0,00198
0,22	0,0077	0,00412	0,20	0,0036	0,00200
0,24	0,0074	0,00410	0,22	0,0036	0,00202
0,26	0,0072	0,00413	0,24	0,0034	0,00204
0,28	0,0068	0,00402	0,26	0,0064	0,00400
0,30	0,0066	0,00401	0,28	0,0062	0,00400
0,32	0,0064	0,00400			

După cum se vede, aplicarea formulei (11) conduce la valori într-adevăr constante în timpul dezemulsionării. De asemenea, se observă că dublarea concentrației de emulgator, înjumătățește aproximativ valoarea constantei k' , dovedind astfel o mai bună stabilizare a emulsiei. Rezultă că formula (11) poate servi la stabilirea relației de legătură între constanta vitezei stratificării fazelor și concentrația emulgatorului.

* * *

Plecînd de la relația (11) și notînd $\alpha = 0,413$, obținem ecuația diferențială :

$$\frac{dv}{dt} = k' (1 - v) v^{1/2-\alpha} \left[1 + \frac{\alpha (1 - v)}{v} \log \frac{1 + \sqrt{v}}{1 - \sqrt{v}} \right]^{-1} \quad (12)$$

Se vede că pentru $\alpha = 0$ se obține ecuația (1) a lui Lederer. Aceasta ne indică că s-ar putea ca în general, pentru alte emulsii să fie valabilă valoarea constantei $k' = kv^\alpha$ și ecuația diferențială (12) pentru o altă valoare a lui α .

Am obținut astfel o modificare a ecuației lui Lederer, a cărei integrală (11) își menține valabilitatea și pentru timpuri mai mari, adică pe toată durata procesului de dezemulsionare.

Rămîne de verificat valabilitatea acestor rezultate și pe alte tipuri de emulsii, găsindu-se valorile α corespunzătoare. De asemenea, s-ar putea pune problema analoagă în cazul cînd cele două lichide din care se obține emulsia nu au volume egale.

BIBLIOGRAFIE

1. E. L. Lederer: Koll. Z., 71, 61, 1935.
2. D. F. Cheesman și A. King: Koll. Z., 83, 33, 1938.
3. A. V. Dumanschi: Coloizii, Ed. Stat, 1949.
4. I. Mokrușin: Koll. J., XX, 1958, p. 6.
5. D. Ștefănescu, N. Tachel: Contribuții la studiul stabilității emulsiilor, Ses. St. I.M.F. Buc., 1963.
6. D. J. Finney: Statistical methods in biological assay, 1964.

ОБ УРАВНЕНИИ ЛЕДЕРЕРА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Уравнение (1) Ледерера относится к процессу разрушения эмульсии во времени. Отношение (3) является интегралом уравнения (1). Опытным путём установлено, что отношение (3) не является вообще действительным.

В этой работе имеется в виду случай эмульсии олеиновой кислоты — раствор Твена. Получилось новое выражение (II) для константы скорости стратификации фаз. Это выражение получилось применяя анализ вариации и регрессии. Устанавливается, что он действителен для данной эмульсии, в случае концентрации 0,5% и 1% эмульгатора.

Получилось также дифференциальное уравнение, которое допускает полученное выражение, как частный интеграл.

ABOUT LEDERER'S EQUATION**A B S T R A C T**

Starting from experimental data that relation (3), which is an integral of Lederer's equation (1) relative to the descomposed process during one emulsion is not valable, in usually, the authores obtain a new expresion (11) for the velocity constant of the fases stratification in the case of the acidum — Tween's solution emulsion.

This expresion is obtained using the variance and regression analysis. It is shown this expresion is true for this type of emulsion with the concentration of 0,5 and 1 per cent of the Tween's solution.

In the last part of the work is obtaining the differential equation which has found expresion as a particular integral.

REPORT ON THE PROGRESS OF THE WORK

1900-1901

The work of the year has been devoted to the study of the history of the Church in the East. The first part of the year was spent in the study of the history of the Church in the East, and the second part in the study of the history of the Church in the West. The work has been carried out in the most thorough and systematic manner, and the results are of great value to the Church and to the world.

FUNCȚII DE TENSIUNE ÎN PROBLEMA CUPLATĂ A TERMOELASTICITĂȚII

E. SOÓS

Presupunem că într-un corp termoelastic avem o stare de deformare plană. Fie u_1, u_2 componentele vectorului deplasare, $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}$ componentele tensorului tensiune, λ, μ constantele lui Lamé, ν coeficientul lui Poisson, ρ densitatea, F_1, F_2 componentele forței de volum, $\mathcal{T}$ temperatura absolută, T_0 temperatura uniformă la momentul inițial, $T = \mathcal{T} - T_0$, χ coeficientul de compresibilitate, α coeficientul de dilatare, k coeficientul de conductibilitate termică, c căldura specifică la deformare constantă, Q intensitatea surselor termice din corp.

Ecuatiile de mișcare au forma următoare :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + F_1 = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \quad (1)$$

Legea lui Hooke este :

$$2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \sigma_{11} - \nu S_0 + \alpha \chi^{-1} (1 - 2\nu) T, \quad (2)$$

$$2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \sigma_{22} - \nu S_0 + \alpha \chi^{-1} (1 - 2\nu) T$$

$$\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \sigma_{12}$$

$$\sigma_{33} = \nu S_0 - \frac{2}{3} \alpha \mu (1 + \nu) T, \quad S_0 = \sigma_{11} + \sigma_{22} \quad (3)$$

În lucrarea [7] am arătat că ecuațiile de compatibilitate au forma următoare :

$$\begin{aligned} & \square_2 \sigma_{11} + \frac{\partial^2 S_0}{\partial x_1^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2 S_0}{\partial t^2} + \\ & + \frac{2}{3} \alpha \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \square_2 T = -2 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) \\ & \square_2 \sigma_{22} + \frac{\partial^2 S_0}{\partial x_2^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2 S_0}{\partial t^2} + \\ & + \frac{2}{3} \alpha \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \square_2 T = -2 \frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\square_2 \sigma_{12} + \frac{\partial^2 S_0}{\partial x_1 \partial x_2} = - \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \right) \quad (5)$$

Adunând și scăzând relațiile (4) obținem :

$$\square_1 S_0 + \frac{2}{3} \alpha \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \square_2 T = - \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \right) \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \sigma_{11} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \sigma_{22} = - \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right) \quad (7)$$

Ecuația energetică are forma :

$$\Delta_2 T - \frac{\alpha T_0}{3\rho c} (1+\nu) \frac{\partial S_0}{\partial t} = - \frac{Q}{\rho s} \quad (8)$$

În relațiile (4)–(8) am utilizat notațiile :

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad \square_1 = \Delta - \frac{1}{v_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\ \square_2 &= \Delta - \frac{1}{v_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad v_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad v_2^2 = \frac{\mu}{\rho} \\ \Delta_1 &= \frac{k}{\rho c} \Delta - \frac{\partial}{\partial t}, \quad \Delta_2 = \Delta_1 - 2(1-\nu) \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

Constanta adimensională de cuplare are următoarea expresie :

$$\varepsilon = \frac{\alpha^2 T_0}{c \rho^2 \chi^2 v_1^2} \quad (10)$$

În cele ce urmează vom da o reprezentare a stării de deformare și de tensiune în corp cu ajutorul a trei funcții de tensiune, folosind metoda matricilor asociate [1].

Fie :

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad P = X_1^2 + X_2^2, \quad Q = P - \frac{\rho}{\mu} Y, \\ Q^* &= P - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} Y, \quad Y = \frac{\partial}{\partial t} \\ R &= \rho c \left[\frac{k}{\rho c} P - Y - 2(1-\nu) \varepsilon Y \right], \\ R^* &= \rho c Q \left[Q^* \left(\frac{k}{\rho c} P - Y \right) - \varepsilon P Y \right] \end{aligned} \quad (11)$$

Să considerăm matricea $\mathcal{E}$ asociată sistemului (6) – (8); obținem :

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} Q^* & Q^* & \frac{2}{3} \alpha \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} Q \\ X_1^2 - \frac{\rho}{2\mu} Y^2 & -\left(X_2^2 - \frac{\rho}{2\mu} Y^2\right) & 0 \\ -\frac{\alpha}{3} T_0 (1+\nu) Y & -\frac{\alpha}{2} T_0 (1+\nu) Y & R \end{bmatrix} \quad (12)$$

Sistemul de ecuații (6)–(8) poate fi scris acum :

$$\mathcal{E} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right) \\ -\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right) \\ -\frac{Q}{\rho c} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Fie $\mathcal{M}$ matricea proporțională cu inversa matricii $\mathcal{E}$; găsim :

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} -R \left(X_2^2 - \frac{\rho}{2\mu} Y^2 \right) & -R^* \frac{2}{3} \alpha \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} Q \left(X_2^2 - \frac{\rho}{2\mu} Y^2 \right) \\ -R \left(X_1^2 - \frac{\rho}{2\mu} Y^2 \right) & R^* \frac{2}{3} \alpha \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} Q \left(X_1^2 - \frac{\rho}{2\mu} Y^2 \right) \\ -\frac{\alpha}{3} T_0 (1+\nu) Q Y & 0 & -QQ^* \end{bmatrix} \quad (14)$$

Avem relația :

$$\mathcal{E} \cdot \mathcal{M} = -R^* E_4, (E_4 - \text{matricea unitate de ordinul patru}) \quad (15)$$

Fie :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ T \end{bmatrix} = \mathcal{M} \begin{bmatrix} \Phi_1^* \\ \Phi_2^* \\ \Phi_3^* \end{bmatrix} \quad (16)$$

Dacă punem : $-\rho c \Phi_1^* = \Phi_1 - \rho c \diamond \Phi_2^*, = \Phi_2, \square_2 \Phi_3^* = \Phi_3$, din (14) și (16) găsim imediat :

$$\sigma_{11} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Delta_2 \Phi_1 + \Phi_2 + \frac{2}{3} \alpha \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi_3 \quad (17)$$

$$\sigma_{22} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Delta_2 \Phi_1 - \Phi_2 + \frac{2}{3} \alpha \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi_3 \quad (18)$$

$$T = \frac{\alpha}{3\rho c} T_0 (1+\nu) \square_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \square_1 \Phi_3 \quad (19)$$

O reprezentare asemănătoare a fost dată de Nowacki în 1960 [2].
 Relațiile (13) și (16) arată că funcțiile $\Phi_i = \Phi_i(x_1, x_2, t)$ trebuie să satisfacă în interiorul domeniului ocupat de corp ecuațiile

$$\square_2 \diamond \Phi_1 = -\frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right) \quad (20)$$

$$\square_2 \Phi_2 = -\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) \quad (21)$$

$$\diamond \Phi_3 = \frac{Q}{\rho c} \quad (23)$$

Am notat :

$$\diamond \square_1 \Delta_1 = \varepsilon \Delta \frac{\partial}{\partial t}$$

Din relațiile (17) și (18) rezultă

$$S_0 = \square_2 \Delta_2 \Phi_2 + \frac{2}{3} \alpha \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \square_2 \Phi_3 \quad (24)$$

Pentru determinarea componentei σ_{12} folosim ecuația de continuitate (5); găsim imediat pe baza relației (24) :

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \Delta_2 \Phi_1 - \frac{2}{3} \alpha \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x_1 \partial x_2} + \Psi(x_1, x_2, t) \quad (25)$$

Funcția $\Psi(x_1, x_2, t)$ trebuie să satisfacă ecuația :

$$\square_2 \Psi = -\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \right) \quad (26)$$

Din legea lui Hooke (2) obținem cu ajutorul relațiilor (17) — (19) următoarele expresii pentru componentele vectorului deplasare :

$$\begin{aligned} 2\mu u_1 = & -\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta_2 \Phi_1 - \frac{2}{3} \alpha \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1} + (1-\nu) \int \diamond \Phi_1 dx_1 + \\ & + \int \Phi_2 dx_1 + \frac{\partial f_2(x_2, t)}{\partial x_2} \\ 2\mu u_2 = & -\frac{\partial}{\partial x_2} \Delta_2 \Phi_1 - \frac{2}{3} \alpha \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} + (1-\nu) \int \diamond \Phi_1 dx_2 - \\ & - \int \Phi_2 dx_2 + \frac{\partial f_1(x_1, t)}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (27)$$

Cu (27) din (1) rezultă că $\Psi(x_1, x_2, t)$ trebuie să satisfacă sistemul

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} &= -F_1 - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} + (1 - \nu) \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \diamond \Phi_1 dx_2 + \\ &\quad + \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \Phi_2 dx_1 + \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} &= -F_2 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} + (1 - \nu) \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \diamond \Phi_1 dx_2 - \\ &\quad - \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \Phi_2 dx_2 + \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial}{\partial t^2} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (28)$$

Din (28) obținem

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi^* \quad (29)$$

unde :

$$\Psi_0 = \frac{1 - \nu}{2} \iint \Delta \diamond \Phi_1 dx_1 dx_2 - \frac{1}{2} \iint \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \Phi_2 dx_1 dx_2 \quad (30)$$

$$\Psi^* = \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[f_1(x_1, t) + f_2(x_2, t) \right] \quad (31)$$

Se vede din (20), (21) și (30) că Ψ_0 satisface ecuația (26). Trebuie să avem grijă însă să determinăm funcțiile arbitrare care intervin în operațiile de integrare în (30) în așa fel ca sistemul (28) să fie verificat (cu $f_1 = f_2 = 0$).

Obținem în definitiv din (25), (29), (30) și (31) :

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \Delta_2 \Phi_1 - \frac{2}{2} \alpha \mu \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x_1 \partial x_2} + \\ &\quad + \frac{1 + \nu}{2} \iint \Delta \diamond \Phi_1 dx_1 dx_2 - \frac{1}{2} \iint \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \Phi_1 dx_1 dx_2 + \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (f_1 + f_2) \end{aligned}$$

Pentru determinarea funcțiilor f_1 și f_2 folosim legea lui Hooke (3); cu relațiile (25), (27), (29) și (31) găsim :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f_1(x_1, t) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f_2(x_2, t) = \\ &= 2\Psi_0 - (1 - \nu) \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \int \diamond \Phi_1 dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \int \diamond \Phi_1 dx_2 \right] + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_1} \int \Phi_2 dx_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} \int \Phi_2 dx_1 \end{aligned} \quad (32)$$

Din relația (30) se vede că (32) este o ecuație cu variabile separabile, avînd forma următoare :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f_1(x_1, t) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f_2(x_2, t) = H_1(x_1, t) + H_2(x_2, t) \quad (33)$$

În relația (33) trebuie să alegem funcțiile H_1 și H_2 în așa fel ca Ψ^* să verifice ecuația (26) omogenă, ceea ce este totdeauna posibil. Ecuația (33) se poate descompune în două relații :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f_1(x_1, t) &= H_1(x_1, t) + \frac{\rho}{\mu} \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + 2\mu \omega_0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f_2(x_2, t) &= H_2(x_2, t) - \frac{\rho}{\mu} \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} - 2\mu \omega_0 \end{aligned} \quad (34)$$

În aceste ecuații $\theta(t)$ este o funcție arbitrară, iar ω_0 este o constantă.

Din sistemul (34) obținem :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, t) &= g_1(x_1 - v_2 t) + h_1(x_1 + v_2 t) + f_1^*(x_1, t) + \\ &\quad + 2\mu \left(\omega_0 \frac{x_1^2}{2} + u_2^0 x_1 \right) - \theta(t) \\ f_2(x_2, t) &= g_2(x_2 - v_2 t) + h_2(x_2 + v_2 t) + f_2^*(x_2, t) + \\ &\quad + 2\mu \left(-\omega_0 \frac{x_2^2}{2} + u_1^0 x_2 \right) + \theta(t) \end{aligned} \quad (35)$$

În relațiile (35) g_1, g_2, h_1, h_2 sînt funcții arbitrare, f_1^*, f_2^* integrale particulare ale ecuațiilor (34), iar u_1^0, u_2^0, ω_0 caracterizează rotația și translația rigidă a corpului. Funcția $\theta(t)$ nu intră în expresia tensiunii tangențiale sau în expresia componentelor vectorului deplasare.

Cu relațiile (35) din (27) obținem :

$$\begin{aligned} 2\mu(u_1 + \omega_0 x_2 - u_1^0) &= -\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta_2 \Phi_1 - \frac{2}{3} \alpha \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1} + \\ &\quad + (1-\nu) \int \diamond \Phi_1 dx_1 + \int \Phi_2 dx_1 + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[g_2(x_2 - v_2 t) + h_2(x_2 + v_2 t) + f_2^*(x_2, t) \right] \\ 2\mu(u_2 - \omega_0 x_1 - u_2^0) &= -\frac{\partial}{\partial x_2} \Delta_2 \Phi_1 - \frac{2}{3} \alpha \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} + \\ &\quad + (1-\nu) \int \diamond \Phi_1 dx_2 - \int \Phi_2 dx_2 + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[g_1(x_1 - v_1 t) + h_1(x_1 + v_1 t) + f_1^*(x_1, t) \right] \end{aligned} \quad (36)$$

Vom considera acum cazul în care forțele masice pot fi neglijate. Ecuația (21) arată că putem lua $\Phi_2 = 0$, iar din (20) conform teoremei lui Boggio obținem :

$$\Phi_1 = \varphi_1^* + \varphi_1^*, \text{ unde } \square_2 \varphi_1^* = 0, \quad \diamond \varphi_2^* = 0 \quad (37)$$

Relațiile (37) permit descompunerea stării de tensiune și de deformăție în trei părți. Vom avea deci :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(3)}; T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)}, u_i = u_i^{(1)} + u_i^{(2)} + u_i^{(3)}; i, j = 1, 2 \quad (38)$$

Folosind relațiile obținute în prima parte a lucrării și ecuațiile (37) obținem :

— *Undele rotaționale :*

Din prima ecuație (37) și din ultima relație (9) rezultă :

$$\diamond \varphi_1^* = \frac{1}{2(1-\nu)} \triangle \Delta_2 \varphi_1^*$$

Dacă punem $\Delta_2 \varphi_1^* = \varphi_1$ obținem imediat :

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi_1, \quad \sigma_{22}^{(1)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi_1, \quad T^{(1)} \equiv 0 \\ \sigma_{12} &= -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{4} \iint \triangle \triangle \varphi_1 dx_1 dx_2 + \frac{\partial}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[f_1^{(1)}(x_1, t) + f_2^{(1)}(x_2, t) \right] \quad (39) \\ 2\mu u_1^{(1)} &= -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \int \triangle \varphi_1 dx_1 + \frac{\partial f_2^{(1)}}{\partial t^2}, \\ 2\mu u_2^{(1)} &= -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \int \triangle \varphi_1 dx_2 + \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial x_1} \end{aligned}$$

Funcțiile $f_1^{(1)}(x_1, t)$ și $f_2^{(1)}(x_2, t)$ se vor determina, ca la relația (32) din ecuația cu variabile separabile :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f_1^{(1)} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f_2^{(1)} &= \iint \triangle \triangle \varphi_1 dx_1 dx_2 - \\ - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \int \triangle \varphi_1 dx_2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \int \triangle \varphi_1 dx_2 &= H_1^{(1)}(x_1, t) + H_2^{(1)}(x_2, t) \end{aligned}$$

Soluția este asemănătoare cu (35).

Este evident că funcția φ_1 verifică ecuația :

$$\square_2 \varphi_1 = 0 \quad (40)$$

Din (35) rezultă imediat :

$$\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial \theta_2} = 0 \quad (41)$$

Relația (41) arată că undele corespunzătoare funcției φ_1 se propagă fără modificarea volumului, iar din (40) rezultă că viteza lor de propa-

gare nu depinde de proprietățile termice ale materialului. Aceste unde nu modifică câmpul termic din interiorul corpului.

— *Undele irotăționale modificate și câmpul termic modificat.*

Din a doua ecuație (37) și din ultima relație (9) rezultă :

$$(1 - 2\nu) \varepsilon \square_2 \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial t} = \square_1 \Delta_2 \varphi_2^*$$

Dacă punem $\Delta_2 \varphi^* = \varphi_2$, obținem imediat :

$$\sigma_{11}^{(2)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi_2, \quad \sigma_{22}^{(2)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi_2, \quad T^{(2)} = \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} \frac{\chi}{\varepsilon} \square_1 \varphi_2$$

$$\sigma_{12}^{(2)} = - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (42)$$

$$2\mu u_1^{(2)} = - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + f_2^{(2)}(x_2, t), \quad 2\mu u_2^{(2)} = - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + f_1^{(2)}(x_1, t)$$

Funcțiile $f_1(x_1, t)$ și $f_2(x_2, t)$ se determină din ecuația cu variabile separabile :

$$\frac{\partial f_1^{(2)}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2^{(2)}}{\partial x_2} = 0 \quad (43)$$

Funcția φ_2 verifică ecuația :

$$\diamond \varphi_2 = 0$$

Din (43) rezultă, abstracție făcând de o roto-translație rigidă :

$$\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_2} = 0$$

Utilizând relațiile (17)–(19) obținem imediat :

$$\sigma_{11}^{(3)} = \frac{2}{3} \alpha \mu \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi_3,$$

$$\sigma_{22}^{(3)} = \frac{2}{3} \alpha \mu \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi_3, \quad T^{(3)} = - \square_2 \Phi_3$$

$$\sigma_{12}^{(3)} = - \frac{2}{3} \alpha \mu \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (45)$$

$$2\mu u_1^{(3)} = - \frac{2}{3} \alpha \mu \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1} + f_2^{(3)}, \quad 2\mu u_2^{(3)} = - \frac{2}{3} \alpha \mu \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} + f_1^{(3)}$$

Funcțiile $f_1^{(3)}(x_1, t)$ și $f_2^{(3)}(x_2, t)$ se determină din ecuația cu variabile separabile :

$$\frac{\partial f_1^{(3)}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2^{(3)}}{\partial x_2} = 0$$

Relațiile (45) arată că $u_1^{(3)}$ și $u_2^{(3)}$ satisfac ecuația :

$$\frac{\partial u_2^{(3)}}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial x_2} = 0$$

BIBLIOGRAFIE

1. Gr. C. Moisil: Teoria preliminară a sistemelor de ecuații cu derivate parțiale liniare cu coeficienți constanți: Bul. St. al Acad. R.P.R. Seria A, vol. 4, Nr. 2, 1952.
2. W. Nowacki: On the treatment of the two-dimensional thermo-elastic problem in terms of stresses: Bul. de l'Acad. Pol. des Sci. Ser. IV, vol. 9 Nr. 3, 1961.
3. P. P. Teodorescu: Asupra unei metode generale de rezolvare a problemei plane a elastodinamicii: Com. Acad. R.P.R., vol. 6, 1956.
4. P. P. Teodorescu: Asupra problemei plane a termoelasticității; Bul. St. al Acad. R.P.R. Seria A, vol. 9, Nr. 2, 1957.
5. V. Ionescu-Cazimir: Asupra ecuațiilor echilibrului termoelastic, IV. Cazul plan.
6. V. Ionescu-Cazimir: Asupra ecuațiilor echilibrului termoelastic plan; Rev. Univ. C. I. Parhon, vol. 1, nr. 1952.
7. E. Soós: The Galerkin's representation and the Beltrami-Mitchell equations in the coupled theory of thermoelasticity (sub tipar).

ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЯ В СОВМЕСТНЫХ УРАВНЕНИЯХ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе предполагается что в термоупругом теле имеется плоское деформированное состояние.

Пользуясь методом ассоциированных матриц [1] и уравнениями совместности Бельтрами-Митчел (6), (7), полученными в работе [7], дается представление составляющих тензора напряжения σ_{11} , σ_{22} и температуры T через три функции напряжения Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 , (17), (18), (19).

Функции напряжения Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 удовлетворяют уравнениям (20), (21), (22).

Для определения составляющей σ_{12} тензора напряжения и u составляющих u_1 и u_2 вектора перемещения используются уравнения совместности (5) и закон Гука (2).

Во второй части работы рассматривается случай нулевых массовых сил ($\vec{F} = 0$). В этом случае $\Phi_2 = 0$.

STRESS FUCTIONS IN THE COUPLED THERMOLASTICITY

ABSTRACT

We consider the plane strain state in a thermoelastic material.

Using the asociated matrices method [1] and the Baltrami-Mitchel compatibility equations (6), (7) we give a representation by three stress functions Φ_1 , Φ_2 , and Φ_3 for the components of the stress tensor σ_{11} , σ_{22} and of the temperature T : (17), (18), (19).

The functions Φ_1 , Φ_2 , and Φ_3 satisfy the equations (20), (11), (21).

In order to determine the component σ_{12} of the stress tensor and the components u_1 and u_2 of the displacement vector we use the compatibility equation (5) and the Hooke's law (6).

In the second part of the paper we suppose $\vec{F} = 0$. In this case $\Phi_2 = 0$.

REPORTS

1. The first of the three reports is a study of the effect of the amount of sleep on the amount of work done. The study was conducted by a group of workers in a factory, and the results showed that the amount of work done was directly proportional to the amount of sleep. The second report is a study of the effect of the amount of sleep on the amount of food eaten. The study was conducted by a group of workers in a factory, and the results showed that the amount of food eaten was directly proportional to the amount of sleep. The third report is a study of the effect of the amount of sleep on the amount of money earned. The study was conducted by a group of workers in a factory, and the results showed that the amount of money earned was directly proportional to the amount of sleep.

CONCLUSIONS

1. The first of the three reports is a study of the effect of the amount of sleep on the amount of work done. The study was conducted by a group of workers in a factory, and the results showed that the amount of work done was directly proportional to the amount of sleep. The second report is a study of the effect of the amount of sleep on the amount of food eaten. The study was conducted by a group of workers in a factory, and the results showed that the amount of food eaten was directly proportional to the amount of sleep. The third report is a study of the effect of the amount of sleep on the amount of money earned. The study was conducted by a group of workers in a factory, and the results showed that the amount of money earned was directly proportional to the amount of sleep.

THE EFFECTS OF THE SLEEP ON THE WORK

1. The first of the three reports is a study of the effect of the amount of sleep on the amount of work done. The study was conducted by a group of workers in a factory, and the results showed that the amount of work done was directly proportional to the amount of sleep. The second report is a study of the effect of the amount of sleep on the amount of food eaten. The study was conducted by a group of workers in a factory, and the results showed that the amount of food eaten was directly proportional to the amount of sleep. The third report is a study of the effect of the amount of sleep on the amount of money earned. The study was conducted by a group of workers in a factory, and the results showed that the amount of money earned was directly proportional to the amount of sleep.

ASUPRA POTENȚIALULUI VITEZELOR ÎN MIȘCAREA TRANSONICĂ NESTAȚIONARĂ PLANĂ

STELIAN TURBATU

1. Este cunoscut [3], că studiul mișcărilor transonice nestaționare în jurul profilelor subțiri la accelerații mici, cere rezolvarea unei ecuații cu derivate parțiale neliniară. Soluția acestei ecuații în cazul mișcării plane a fost dată de HOSOKAWA I. [2] și TEIPEL I [6]. Atît Hosokawa cît și Teipel dau soluția problemei la limită, deci potențialul vitezelor $\varphi(x, z)$, numai pe profil. După cum se știe, este important a cunoaște potențialul vitezelor și în jurul profilului. Avînd în vedere acest fapt, vom da în prezenta notă o expresie generală pentru potențialul vitezelor valabilă în vecinătatea profilului. Din această expresie pentru $z=0$ vom obține soluția dată de Hosokawa I [2] și Teipel I. [6]. Altă particularizare ne va da soluția din cazul teoriei liniare [1], [3] și [4].

2. Fie o mișcare nestaționară, irotatională, fără frecare, izentropică și fără schimb de căldură. În acest caz, cum este cunoscut, mișcarea este descrisă de un potențial al vitezelor. Teoria micilor perturbații furnizează atunci în domeniul tronsonic o ecuație cu derivate parțiale neliniară [3] de formă :

$$[1 - M_\infty^2 - (\gamma + 1) M_\infty^2 \Phi_x] \Phi_{xx} + \Phi_{zz} - 2M_\infty^2 \Phi_{xt} - M_\infty^2 \Phi_{tt} = 0. \quad (1)$$

Aici $\Phi = \Phi(x, z; t)$ este potențialul vitezelor, γ raportul căldurilor specifice, iar M_∞ numărul MACH în mișcarea neperturbată.

Presupunem acum că profilul are o mișcare oscilatorie armonică așa încît Φ poate fi luat sub forma :

$$\Phi(x, z; t) = \chi(x, z) + \varphi(x, z) e^{ikt} \quad (2)$$

unde k este frecvența redusă.

Introducînd (2) în ecuația (1) obținem, prin neglijarea termenilor de ordinul doi și mai mare în φ , ecuațiile :

$$[1 - M_\infty^2 - (\gamma + 1) M_\infty^2 \chi_x] \chi_{xx} + \chi_{zz} = 0, \quad (3)$$

$$[1 - M_\infty^2 - (\gamma + 1) M_\infty^2 \chi_x] \varphi_{xx} - (\gamma + 1) M_\infty^2 \chi_{xx} \varphi_x + \varphi_{zz} - 2ik M_\infty^2 \varphi_x + k^2 \varphi = 0. \quad (4)$$

Cu ecuația (3) s-a separat așa deci problema mișcării staționare. În cele ce urmează vom considera cazul $M_\infty = 1$. În acest caz, înlocuind $M_\infty = 1$ în ecuația (4), problema la limită ce o avem de rezolvat se enunță astfel :

Să se găsească o soluție a ecuației

$$-(\gamma + 1) \chi_x \varphi_{xx} - (\gamma + 1) \chi_{xx} \varphi_x + \varphi_{zz} - 2ik \varphi_x + k^2 \varphi = 0 \quad (5)$$

ce verifică condiția la limită

$$\varphi_z = g(x) \text{ pe } z = 0, \text{ adică pe profil.} \quad (6)$$

Aici $g(x)$ este o funcție dată [3].

Vom neglija acum termenul $(\gamma + 1) \chi_x \varphi_{xx}$, care, așa cum se arată în [6], este relativ mic în comparație cu ceilalți termeni din (5).

Astfel, ecuația (5) devine :

$$-(\gamma + 1) \chi_{xx} \varphi_x + \varphi_{zz} - 2ik \varphi_x + k^2 \varphi = 0. \quad (7)$$

Fie mai departe după [6], $(\gamma + 1) \chi_{xx} = \tau = \text{const.}$ Atunci ecuația (7) ia forma :

$$\varphi_{zz} - \Omega \varphi_x + k^2 \varphi = 0, \quad (8)$$

unde

$$\Omega = \tau + 2ik. \quad (9)$$

Vom considera acum transformata Fourier a funcției $\varphi(x, z)$ în raport cu x definită de formula [5] :

$$\psi(z, s) = F\{\varphi(x, z)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, z) e^{-isx} dx \quad (10)$$

a cărei inversă este

$$\varphi(x, z) = F^{-1}\{\psi(z, s)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z, s) e^{isx} ds. \quad (11)$$

Cu (10), (11), și

$$G(s) = F\{g(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-isx} dx, \quad (12)$$

problema la limită definită de ecuațiile (8) și (6) devine : Să se găsească o soluție a ecuației

$$\psi_{zz} + \lambda^2 \psi = 0 \quad (13)$$

ce verifică condiția la limită

$$\psi_z = G(s) \text{ pe } z = 0, \quad (14)$$

unde

$$\lambda = (k^2 - is\Omega)^{1/2}. \quad (15)$$

O soluție a acestei probleme la limită se poate da sub forma :

$$\psi(z, s) = \frac{i}{\lambda} e^{-i\lambda z} G(s). \quad (16)$$

λ este ales astfel încît $\text{Im} \{\lambda\} < 0$.

Pentru a obține potențialul vitezelor $\varphi(x, z)$, va trebui să aplicăm teorema de convoluție relativă la transformata Fourier. În acest scop avem de calculat :

$$F^{-1} \left\{ \frac{i}{\lambda} e^{-i\lambda z} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{\lambda} e^{-i\lambda z + i s z} ds.$$

După un calcul relativ ușor, obținem în cele din urmă expresia :

$$F^{-1} \left\{ \frac{i}{\lambda} e^{-i\lambda z} \right\} = -\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\pi\Omega x}} \exp \left[\frac{k^2}{\Omega} x - \frac{\Omega z^2}{4x} \right]. \quad (17)$$

Cum se poate ușor constata

$$F^{-1} \{G(s)\} = g(x) \text{ pe } z = 0, \quad (18)$$

asa încît din (16), (17) și (18) obținem, prin aplicarea teoremei de convoluție, potențialul vitezelor căutat sub forma :

$$\varphi(x, z) = -\frac{1}{\sqrt{\pi\Omega}} \int_0^x (x - \xi)^{-1/2} \exp \left[\frac{k^2}{\Omega} (x - \xi) - \frac{\Omega z^2}{4(x - \xi)} \right] g(\xi) d\xi \quad (19)$$

pentru $z > 0$.

Dacă ne vom mărgini la cazul $z = 0$, deci potențialul vitezelor pe profil, vom găsi, făcînd direct $z = 0$ în (19), deoarece integrala converge uniform, relația :

$$\varphi(x, 0) = -\frac{1}{\sqrt{\pi\Omega}} \int_0^x (x - \xi)^{-1/2} \exp \left[\frac{k^2}{\Omega} (x - \xi) \right] g(\xi) d\xi. \quad (20)$$

Această expresie a fost dată de H o s o k a w a I [2] și T e i p e l I [6].

În cazul $\tau = 0$, deci $\Omega = 2ik$, obținem de la (19) expresia potențialului vitezelor de la teoria liniară [3] :

$$\varphi(x, z) = \frac{i-1}{2\sqrt{\pi k}} \int_0^x (x - \xi)^{-1/2} \exp \left[-i \frac{k}{2} \left(x - \xi + \frac{z^2}{x - \xi} \right) \right] g(\xi) d\xi. \quad (21)$$

Pentru a obține potențialul vitezelor pe profil dela teoria liniară, să facem $z = 0$ în (21). Vom avea atunci :

$$\varphi(x, 0) = \frac{i-1}{2\sqrt{\pi k}} \int_0^x (x - \xi)^{-1/2} \exp \left[-i \frac{k}{2} (x - \xi) \right] g(\xi) d\xi, \quad (22)$$

expresie dată de B e r m a n - N e l s o n [1], R o t t N. [4] și L a n d a h l M. T. [3].

BIBLIOGRAFIE

1. Berman, J. H. and Nelson, C. H.: Calculations on the forces and moments for an oscillating wing-aileron combination in twodimensional potential flow at sonic speed. N A C A Rep. 1128 (1953).
2. Hosokawa, I.: An simplified analysis for transonic flow around thin bodies. IUTAM Symposium Transsonicum, Aachen 1962 Springer-Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg (1964).
3. Landahl, M. T.: Unsteady Transonic Flow: Pergamon Press, Oxford/London/New York/Paris (1961).
4. Rott, N.: Oscillating airfoils at Mach number one. J. Aeron. Sci. 16 (1949),
5. Sneddon, J.: Fourier Transforms. McGraw-Hill, New York/Toronto/London 1951.
6. Teipel, I.: Die Strömung um schwingende Profile bei der Anstrom-Mach-Zahl. 1. IUTAM Symposium Transsonicum, Aachen 1962 Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg (1964).

**О ПОТЕНЦИАЛЕ СКОРОСТЕЙ ПРИ ОКОЛОЗВУКОВОМ НЕСТАЦИОНАРНОМ
ПЛОСКОМ ТЕЧЕНИИ**

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей заметке дается общее выражение для потенциала скоростей $\Phi(x, z)$ при плоском околосвуковом нестационарном течении.

**DAS GESCHWINDIGKEITSPOTENTIAL IN DER EBENEN INSTATIONÄREN
SCHALLNAHESTRÖMUNG**

ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit wurde, für ebene instationäre schallnahe Strömung, eine allgemeine Darstellung des Geschwindigkeitspotential $\Phi(x, z)$ abgeleitet.



Redactor: *Ștefania Barbu*
Tehnoredactor: *Mihail Georgescu*

Analele Universității București
Seria ȘTIINȚELE NATURII
MATEMATICĂ-MECANICĂ
Anul XIV — Nr. 1 — 1965



DOCUMENT

F1914

U:031997

ANALELE UNIVERSITĂȚII BUCUREȘTI

SERIA
ȘTIINȚELE NATURII
MATEMATICĂ-MECANICĂ

ANUL XIV — 1965

ANALELE UNIVERSITĂȚII BUCUREȘTI



SERIA
ȘTIINȚELE NATURII

MATEMATICĂ-MECANICĂ

ANUL XIV—Nr. 2—1965

SERIA ȘTIINȚELE NATURII

COLEGIUL DE REDACȚIE

Redactor responsabil: Acad. prof. *M. Filănescu*.

Membri: Acad. prof. *H. Hulubei*; acad. prof. *M. Nicolescu*; prof. dr. docent în științe *P. Spacu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; prof. dr. docent în științe *N. Botnariuc*.

Secretari: Conf. dr. *G. Ciucu*; Conf. dr. *D. Negoiu*.

MATEMATICĂ — MECANICĂ

COMITETUL DE REDACȚIE

Redactor responsabil: Acad. prof. *M. Nicolescu*.

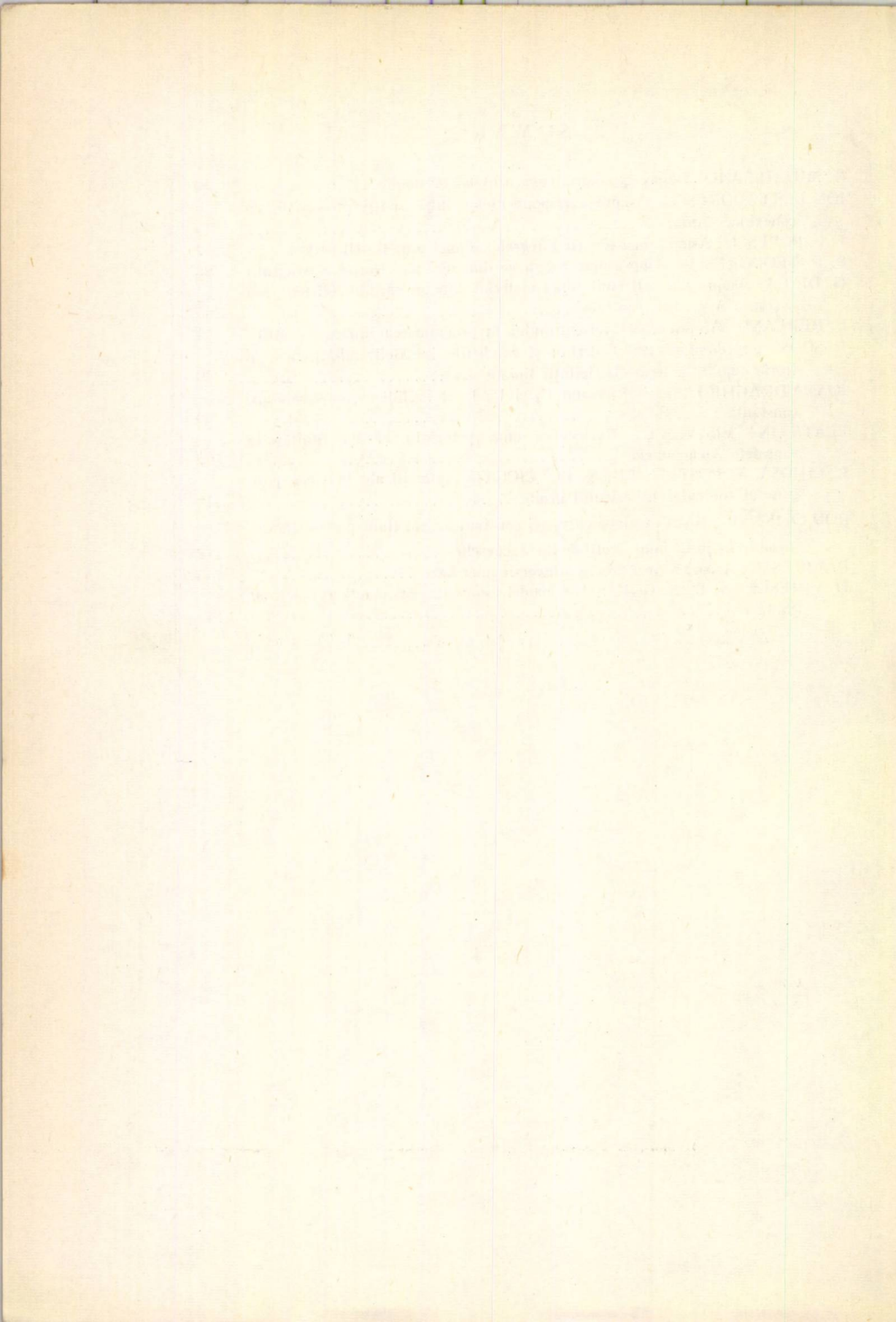
Membri: Acad. prof. *C. Iacob*; acad. prof. *Gh. Mihoc*; acad. prof. *N.V. Theodorescu*; acad. prof. *Gh. Vranceanu*; prof. dr. docent în științe *Gh. Galbură*; conf. dr. *C. Andreian*; Conf. dr. *G. Ciucu*.

Secretar: Conf. dr. *P. P. Teodorescu*.

REDACȚIA
UNIVERSITATEA BUCUREȘTI
B-dul Gh. Gheorghiu-Dej nr. 64
Telefon 16.01.87/09

SUMAR

	Pag.
N. MIHĂILEANU: Despre geometria congruențelor de drepte.....	9
ION D. TEODORESCU: Asupra corespondențelor între spații proiective cu conexiune liniară	13
I. L. POPESCU: Asupra unei ecuații integrale cu nucleu de tip Hilbert	17
P. P. TEODORESCU: Asupra unor probleme dinamice ale teoriei elasticității	23
G. DINCĂ: Asupra mișcării unui punct material într-un mediu rezistent sub acțiunea A n forțe centrale	35
B. BEREANU: Asupra repartiției optimului în programarea liniară stocastică	41
E. SOŌS: Reprezentarea lui Galerkin și condițiile lui Beltrami-Mitchell în teoria cuplată a termoelasticității liniare	49
IOANA DRĂGHICI: Spații Riemann V_4 și V_5 local euclidiene, cu conexiune constantă	59
ECATERINA VIȘINESCU: Extinderea unui principiu al lui Stoilow la suprafețe riemanniene	99
L. CHIOSA, T. POSTELNICU, N. BONCIOCAT: Aplicații ale metodei poli- gonului funicular în calculul grafic	111
<u>ION CRISTEA</u> : Mișcarea plană cu vîrtej constant a unui fluid perfect incom- presibil în jurul unui profil de tip Jucovschi	117
P. MIRESCU: Asupra formei produs a inversii unei baze	135
D. FIRESCU și D. NEGOIU: Un model stocastic în cinetica reacțiilor chimice	143

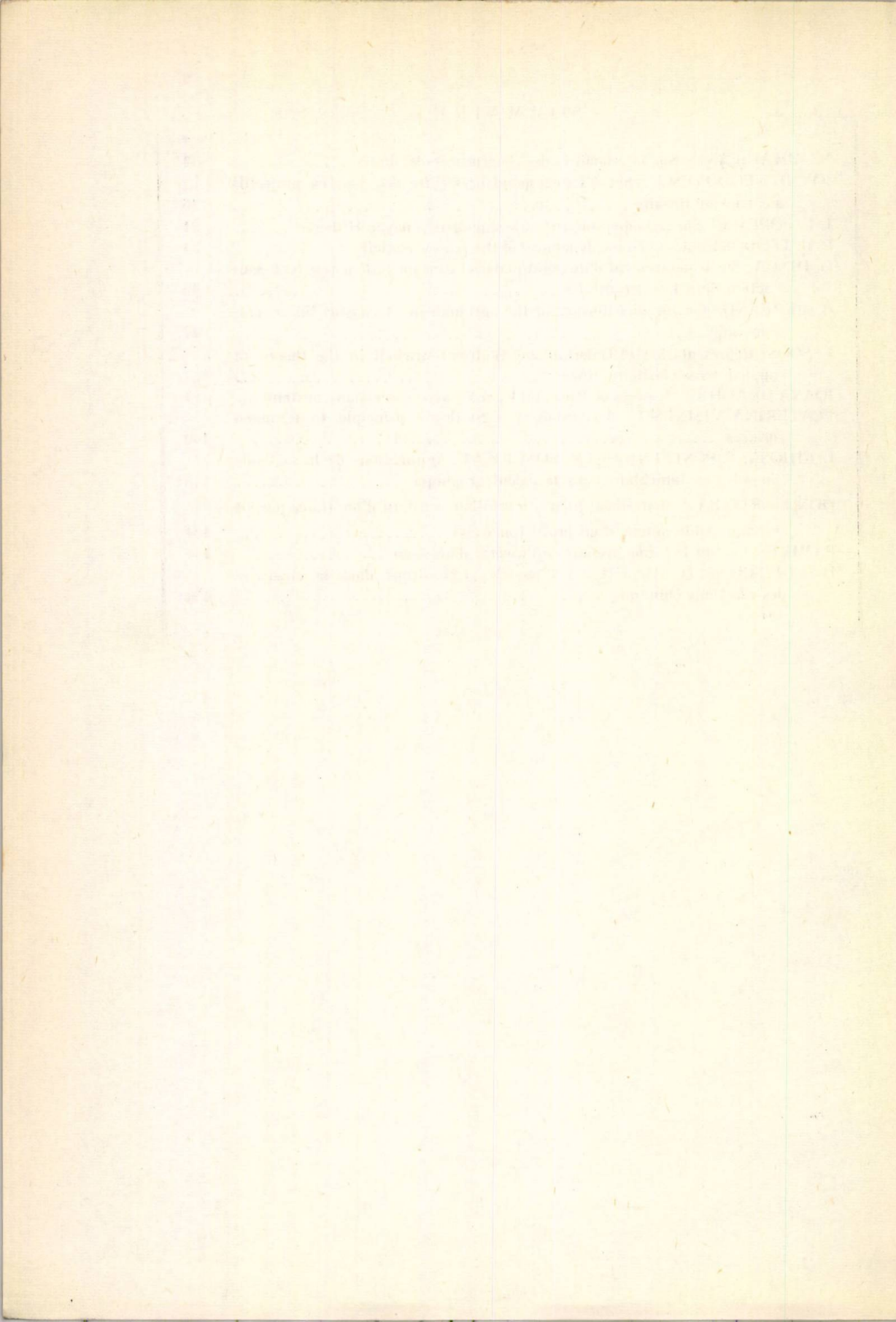


СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Н. МИХЭЙЛЯНУ: О геометрии конгруэнсов прямой линии	11
ИОН Д. ТЕОДОРЕСКУ: К вопросу о соответствиях между проективными пространствами с линейной связью	16
И. Л. ПОПЕСКУ: О сингулярном интегральном уравнении с ядром Гильберта	21
П. П. ТЕОДОРЕСКУ: О динамических задачах теории упругости	34
Г. ДИНКЭ: Движение материальной точки в сопротивляющейся среде под действием центральных сил	40
Б. БЕРЕАНУ: О распределении оптимума в стохастическом линейном программировании	47
Е. СООС: Представление типа Галёркина и уравнения Бельтрами-Митчеля в совместной теории термоупругости	57
ИОАНА ДРЭГИЧ: Риманновы пространства V_4 и V_5 с постоянной связностью	97
ЕКАТЕРИНА ВИШИНЕСКУ: Распространение одного принципа Стоилова на риманновы поверхности	109
Л. КИОСА, Т. ПОСТЕЛНИКУ и Н. БОНЧОКАТ: Применение метода верёвочного многоугольника к графическому расчёту	115
ИОН КРИСТЯ: Плоские движения с постоянным вихрем для идеальной несжимаемой жидкости вокруг одного профиля Жуковского типа	134
П. МИРЕСКУ: Относительно формы произведения инверсии некоторого основания	140
Д. ФИРЕСКУ и Д. НЕГОЮ: Стихастическая модель в кинетике химических реакций	150

SOMMAIRE

	Page
N. MIHĂILEANU: Sur la géométrie des congruences de droits	11
ION D. TEODORESCU: Sur les correspondances entre des espaces projectifs à connexion lineaire	16
I. L. POPESCU: Sur une equation intégrale singulière à noyan Hilbert	21
P. P. TEODORESCU: On some dynamical of the theory elasticity	34
G. DINCĂ: Sur le mouvement d'un point matériel dans un milieu résistent sous l'action de n forces centrales.....	40
B. BEREANU: On the distribution of the optimum in stochastic linear pro- gramming	47
E. SOÓS: Representation of Golerkin and Beltrami-Mitchell in the theory of coupled termoelasticity linear	57
IOANA DRĂGHICI: Espaces de Riemann V_4 et V_5 avec connexion constant....	97
ECATERINA VIȘINESCU: Extension of a Stoilow's principle to Riemann surfaces	109
L. CHIOSA, T. POSTELNICU și N. BONCIOCAT: Applications de la méthode du polygone funiculaire dans le calcul graphique	115
<u>ION I. CRISTEA:</u> Mouvement plan a tourbillon constant d'un fluide parfait incompressible autour d'un profil Joukovski.....	134
P. MIRESCU: Sur la forme produit de l'inverse d'un base	141
D. FIRESCU și D. NEGOIU: Un modèle stachastique dans la cinetique des réactions chimique	150



DESPRE GEOMETRIA CONGRUENȚELOR DE DREPTE

N. MIHĂILEANU

Considerăm o suprafață s , un punct $M(u, v)$ al ei și o rază r , care trece prin M , al cărei versor M' depinde de poziția punctului M pe s . Congruenței de drepte r putem să-i atașăm o geometrie după modelul geometriei suprafețelor, înlocuind normala prin raza r . În acest scop, introducem forma diferențială

$$(1) \quad \iota = M' \cdot dM = i du + j dv$$

$\iota = 0$ de-a lungul direcției δM a planului tangent μ , perpendiculară pe raza r . Ea este o diferențială exactă, adică expresia

$$(2) \quad I = i_\bullet - j_\bullet$$

este nulă, dacă avem o congruență de normale.

Rotim deplasarea elementară arbitrară dM din planul tangent, în planul (M', dM) , pînă în poziția dM^* perpendiculară pe M' ; planul μ devine planul $(\delta M, dM^*)$. Deci toate proprietățile diferențiale de primul ordin ale congruenței, legate de cuplul (s, r) sînt proprietățile uzuale ale suprafeței și ale normalei sale în M , cu diferența că înlocuim planul tangent al suprafeței prin planul perpendicular pe r , descris de dM^* .

dM^* fiind o deplasare situată în planul (M', dM) și reducîndu-se la dM cînd r coincide cu normala, să punem

$$dM^* = dM + \lambda M'$$

Înmulțind scalar cu M' obținem

$$(3) \quad dM^* = dM - \iota M'$$

Deci formal, toată geometria diferențială de primul ordin a congruențelor de drepte, atașate unei suprafețe, revine la înlocuirea deplasării dM prin dM^* dată de (3). Această înlocuire este neolonomă, adică în general, punctul M^* nu există și implicit planele considerate nu înfășoară o suprafață.

2. Fie

$$(4) \quad \varphi = dM^2 = e du^2 + 2f du dv + g dv^2$$

prima formă fundamentală a suprafeței s . Notăm.

$$(5) \quad dM^{*2} = \varphi - \iota^2 = \omega$$

$$(6) \quad dM^* \cdot dM' = dM \cdot dM' = -\psi$$

$$(7) \quad dM'^2 = \chi$$

Putem să considerăm deci în teoria congruențelor de drepte, cele trei forme fundamentale

$$(8) \quad \omega = a du^2 + 2b du dv + cdv^2 \quad d^2 = ac - b^2$$

$$(9) \quad \psi = \lambda du^2 + (\mu + \mu') du dv + \nu dv^2 \quad \kappa^2 = \lambda \nu - \mu \mu'$$

$$(10) \quad \chi = e' du^2 + 2f' du dv + g' dv^2 \quad \delta'^2 = e' g' - f'^2$$

între coeficienții formelor ω , χ avem relațiile

$$(11) \quad \begin{aligned} d^2 e' &= a \mu^2 - 2b \lambda \mu + c \lambda^2, \quad d^2 g' = a \nu^2 - 2b \mu' \nu + c \mu'^2 \\ d^2 f' &= a \mu \nu - b(\lambda \nu + \mu \mu') + c \lambda \mu' \end{aligned}$$

și inversele lor

$$(12) \quad \delta'^2 a = e' \mu'^2 - 2f' \lambda \mu' + g' \lambda^2, \dots$$

Formulele Weingarten devin

$$(13) \quad d^2 M'_u = \begin{vmatrix} a & b & M_u^* \\ b & c & M_v^* \\ \lambda & \mu & 0 \end{vmatrix}, \quad d^2 M'_v = \begin{vmatrix} a & b & M_u^* \\ b & c & M_v^* \\ \mu' & \nu & 0 \end{vmatrix}$$

și inversele lor

$$(14) \quad \delta'^2 M_u^* = \begin{vmatrix} e' & f' & M'_u \\ f' & g' & M'_v \\ \lambda & \mu & 0 \end{vmatrix}, \quad \delta'^2 M_v^* = \begin{vmatrix} e' & f' & M'_u \\ f' & g' & M'_v \\ \mu' & \nu & 0 \end{vmatrix}$$

Formulele Rodrigues devin de asemenea

$$(15) \quad M_u^* + r_1 M'_u = 0, \quad M_v^* + r_2 M'_v = 0$$

unde r_1, r_2 sînt distanțele focale.

Aceste relații și toate celelalte de primul ordin diferențial diferă formal de analogele lor din teoria suprafețelor, prin simpla substituție (3) și a consecințelor ei.

3. Într-un spațiu neeuclidian, fie $M(u, v)$ un punct al unei suprafețe s , r o rază trecînd prin M și M' punctul ortogonal lui M , situat pe r . Luăm în planul (M, M', dM) punctul dM^* ortogonal lui M și M' ; obținem ca în primul paragraf, formula fundamentală (3).

Dar într-un spațiu neeuclidian putem să urmărim o perfectă dualitate în teoria suprafețelor și a congruențelor, schimbînd rolul punctelor M și M' . Forma (1) își schimbă semnul și relației (3) îi adăugăm corelativa ei

$$(16) \quad dM'^* = dM' + \iota M$$

Forma (6) rămîne aceeași

$$dM^* \cdot dM'^* = dM \cdot dM'$$

dar (7) devine

$$(17) \quad dM'^{*2} = \varphi - \iota = \omega'$$

$$(18) \quad \omega' = a' du^2 + 2b' du dv + c' dv^2 d'^2 = a'c' - b'^2$$

Formulele precedente cîștigă o perfectă simetrie.

Între formele ω , ω' avem relațiile

$$(19) \quad d^2a' = a\mu^2 - 2b\lambda\mu + c\lambda^2, \dots$$

$$(20) \quad d'^2a = a'\mu'^2 - 2b'\lambda\mu' + c'\lambda'^2, \dots$$

Relațiile Weingarten și inversele devin

$$(21) \quad d^2M_u'^* = \begin{vmatrix} a & b & M_u^* \\ b & c & M_v^* \\ \lambda & \mu & 0 \end{vmatrix}, \dots, d'^2M_u^* = \begin{vmatrix} a' & b' & M_u'^* \\ b' & c' & M_v'^* \\ \lambda' & \mu' & 0 \end{vmatrix}, \dots$$

De asemenea relațiile Rodrigues

$$(22) \quad \cos \frac{r_1}{q} M_u^* + \sin \frac{r_1}{q} M_u'^* = 0$$

Toate aceste relații coincid, prin suprimarea asteriscului, celor valabile în teoria suprafețelor neeuclidiene.

Sensul acestei note a fost să dăm o justificare geometrică, substituției (3), (16) indicată într-o notă precedentă¹ prin rațiuni de calcul.

О ГЕОМЕТРИИ КОНГРУЕНЦОВ ПРЯМОЙ ЛИНИИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Дается геометрическая интерпретация указанного способа в другой заметке автора¹ чтобы формально отметить дифференциальную геометрию от первой степени, конгруэнцов прямой линии, отхода от теории поверхностей.

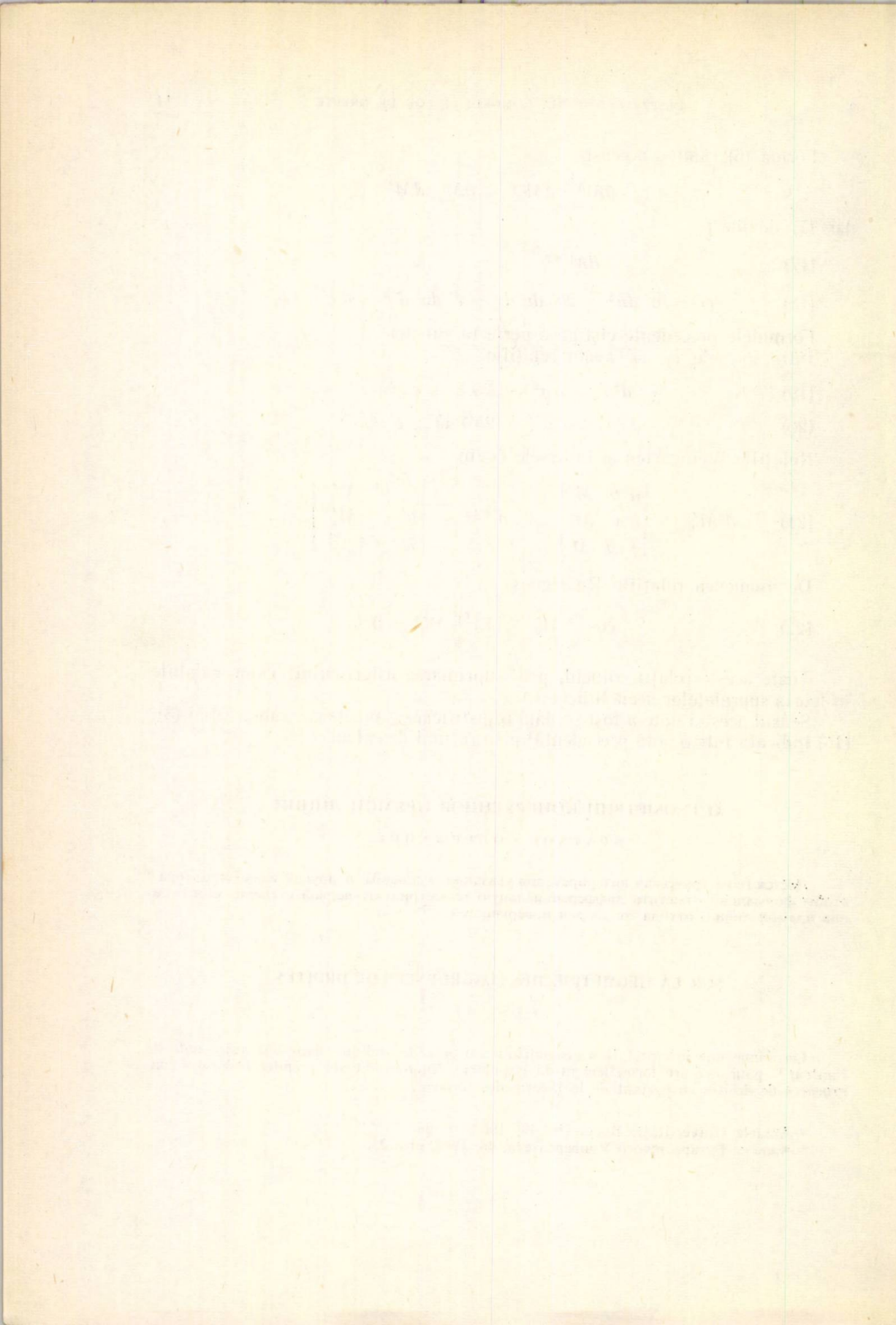
SUR LA GÉOMÉTRIE DES CONGRUENCES DE DROITES

RÉSUMÉ

On donne une interprétation géométrique au procédé indiqué dans une autre note de l'auteur¹ pour déduire formellement la géométrie différentielle du premier ordre des congruences de droites en partant de la théorie des surfaces.

¹ Analele Universității București, 40, 1963, p. 25.

¹ Анналы Бухарестского Университета, 40, 1963, стр. 25.



ASUPRA CORESPONDENȚELOR ÎNTRE SPAȚII PROIECTIVE CU CONEXIUNE LINIARĂ*

ION D. TEODORESCU

În această notă se determină forma la care poate fi redusă conexiunea proiectivă π_{jk}^i asociată unei corespundențe între două plane proiective, în cazul când conexiunea este liniară.

Fie

$$(1) \quad u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

o corespundență între două spații proiective $P_2(x, y)$ și $E_2(u, v)$. După O. Boruvka [1] se zice că (1) este o corespundență de *prima*, a *doua* sau a *treia speță* după cum curbele caracteristice

$$(2) \quad -\pi_{22}^1 dy^3 - 3\pi_{12}^1 dy^2 dx + 3\pi_{12}^2 dy dx^2 + \pi_{11}^2 dx^3 = 0$$

sînt toate distincte, două confundate sau toate confundate, π_{jk}^i ($i, j=1, 2$) fiind coeficienții conexiunii proiective a spațiului P_2 ($\pi_{ik}^i = 0$). Dacă direcțiile caracteristice $\frac{dy}{dx}$ sînt nedeterminate, deci $\pi_{jk}^i = d$, corespundența (1) este proiectivă.

Prof. G. Vrănceanu [2] (v. și [3], II, p. 382) a demonstrat că, o corespundență (1) este de prima, de a doua sau de a treia speță după cum forma pătratică

$$\Phi = \pi_{ij} dx^i dx^j, \quad \pi_{ij} = \pi_{ij}^s, \pi_{ij}^r,$$

este nedegenerată, degenerată sau identic nulă.

De asemenea, prof. G. Vrănceanu [4] (v. și [3], III, p. 125) a dat condiția necesară și suficientă pentru ca π_{jk}^i să reprezinte tensorul proiectiv al unei corespundențe între două spații proiective.

Presupunem că spațiul P_2 este cu *conexiune proiectivă liniară*, adică există un sistem de coordonate în care π_{jk}^i sînt funcții liniare de variabilele spațiului. Transformările preferate ale acestor spații sînt transformările afine.

$$(3) \quad x'^i = a_j^i x^j + a^i \quad (a_j^i, a^i = \text{const}, |a_j^i| = 0),$$

* Comunicare prezentată la a doua sesiune științifică a Institutului Pedagogic din București (25—26 aprilie 1964).

față de care conexiunea proiectivă π_{jk}^i se transformă ca un tensor

$$(4) \quad \pi_{rs}^i a_j^s a_k^s = \pi_{jk}^r a_r^i$$

Să considerăm, mai întâi, cazul cînd *corespondența* (1) este *de a treia speță*. Atunci, ecuația (2) trebuie să fie de forma

$$(\lambda dx + \mu dy)^3 = 0,$$

de unde, prin identificare, rezultă

$$\pi_{22}^1 = -\rho\mu^3, \quad \pi_{12}^1 = -\rho\mu^2\lambda, \quad \pi_{22}^2 = \rho\mu\lambda^2, \quad \pi_{11}^2 = \rho\lambda^3$$

Deoarece π_{jk}^i sînt componentele unei conexiuni liniare, nu putem avea decît $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$; deci, curbele caracteristice sînt drepte

$$\lambda x + \mu y = \text{const.}$$

Rezultă *propoziția*:

O corespondență de a treia speță între plane proiective este cu caracteristici drepte.

Observăm că, prin transformarea liniară

$$(3') \quad x' = \lambda x + \mu y, \quad y' = y,$$

avem $\pi_{22}^1 = 0$; cu alte cuvinte, putem face ca dreptele caracteristice să fie paralele cu axa Oy. Deci, conexiunea proiectivă a spațiului P_2 este de forma

$$\begin{aligned} \pi_{11}^1 &= 0, & \pi_{12}^1 &= \pi_{21}^1 = 0, & \pi_{22}^1 &= 0, \\ \pi_{11}^2 &= ax + by + c, & \pi_{12}^2 &= \pi_{21}^2 = 0, & \pi_{22}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Să considerăm, acum, cazul cînd *corespondența* (1) este *de a doua speță*. Atunci, ecuația curbelor caracteristice (2) este de forma

$$(\lambda dx + \mu dy)^2 (\nu dx + \eta dy) = 0;$$

identificînd, obținem

$$\pi_{22}^1 = -\rho\eta\mu^2, \quad \pi_{11}^2 = \rho\nu\lambda^2$$

Deoarece conexiunea proiectivă este liniară, avem $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$. Deci, una din familiile de curbe caracteristice este congruența de drepte

$$\lambda x + \mu y = \text{const.}$$

Rezultă *propoziția*:

Dacă corespondența între plane proiective este de a doua speță, cel puțin una din familiile de curbe caracteristice este o congruență de drepte.

Observăm că, prin transformarea (3') avem $\pi_{22}^1 = 0$. Deci, conexiunea proiectivă a spațiului P_2 este de forma

$$(6) \quad \begin{aligned} \pi_{11}^1 &= -\frac{1}{3}\rho\eta, & \pi_{12}^1 &= \pi_{21}^1 = 0, & \pi_{22}^1 &= 0, \\ \pi_{11}^2 &= \rho\nu, & \pi_{12}^2 &= \pi_{21}^2 = \frac{1}{3}\rho\eta, & \pi_{22}^2 &= 0 \end{aligned}$$

În sfârșit, să considerăm cazul cînd *corespondența* (1) este *de prima speță*. Atunci ecuația curbelor caracteristice (2) este de forma

$$(A dx^2 + 2B dx dy + C dy^2) (v dx + \rho dy) = 0 \quad (AC - B^2 = 0);$$

deci, avem

$$(7) \quad \pi_{22}^1 = -\rho C\eta, \quad \pi_{12}^1 = -\frac{1}{3}\rho(Cv + 2B\eta), \quad \pi_{12}^2 = \frac{1}{3}\rho(A\eta + 2Bv), \quad \pi_{11}^2 = \rho Av.$$

Sînt de considerat două cazuri, după cum A, B, C, sînt constante sau cel puțin una din ele este o funcție liniară în x, y .

În primul caz, printr-o afinitate, ecuația curbelor caracteristice devine

$$(\lambda^2 dx^2 + \varepsilon \mu^2 dy^2) (v dx + \rho dy) = 0,$$

unde λ, μ sînt constante, iar $\varepsilon = \pm 1$. Deci, corespondența este cu caracteristice drepte, două din familiile de curbe caracteristice drepte, fiind congruențe de drepte (reale sau imaginare). Dacă corespondența este cu caracteristici reale (ceea ce are loc atunci cînd $\varepsilon = -1$), congruențele de drepte caracteristice sînt

$$\lambda x + \mu y = \text{const.}, \quad \lambda x - \mu y = \text{const.}$$

Atunci, prin transformarea de variabile

$$x' = \lambda x + \mu y, \quad y' = \lambda x - \mu y$$

avem $\pi_{22}^1 = \pi_{11}^2 = 0$. Deci, conexiunea spațiului este de forma

$$(8) \quad \begin{aligned} \pi_{11}^1 &= -\frac{2}{3}\rho v, & \pi_{12}^1 &= \pi_{21}^1 = -\frac{2}{3}\rho\eta, & \pi_{22}^1 &= 0, \\ \pi_{11}^2 &= 0, & \pi_{12}^2 &= \pi_{21}^2 = \frac{2}{3}\rho v, & \pi_{22}^2 &= \frac{2}{3}\rho\eta. \end{aligned}$$

În al doilea caz, trebuie să avem $v = \text{const.}, \eta = \text{const.}$ adică corespondența este cu caracteristici drepte, una din familiile curbe caracteristice fiind congruența de drepte

$$vx + \eta y = \text{const.}$$

Atunci, prin transformarea de variabile

$$x' = vx + \eta y, \quad y' = y$$

avem $\pi_{22}^1 = 0$. Deci conexiunea spațiului este de forma

$$(9) \quad \begin{aligned} \pi_{11}^1 &= -\frac{2}{3}\rho B, & \pi_{12}^1 &= \pi_{21}^1 = -\frac{1}{3}\rho C, & \pi_{22}^1 &= 0, \\ \pi_{11}^2 &= \rho A, & \pi_{12}^2 &= \pi_{21}^2 = \frac{2}{3}\rho B, & \pi_{22}^2 &= \frac{1}{3}\rho C. \end{aligned}$$

Așadar, avem *propoziția*:

O corespondență de primă speță între plane proiective admite una sau două congruențe de drepte ca familii de curbe caracteristice.

Deci, avem rezultatul:

Fiind dată o corespondență între două plane proiective, putem printr-o afinitate reduce pe π_{22}^1 (sau π_{22}^1 și π_{11}^2) la zero, dacă corespondența nu admite două congruențe de drepte imaginare. ca familii de curbe caracteristice.

Rezultă că, în determinarea conexiunilor proiective liniare ale spațiilor P_2 putem considera de la început că $\pi_{22}^1 = 0$ sau $\pi_{22}^1 = \pi_{11}^2 = 0$. Folosind teorema prof. G. Vrănceanu ([3], III p.143) prin care se arată condiția necesară și suficientă pentru ca tensorul proiectiv π_{jk}^i să definească o corespondență între plane proiective, se pot determina efectiv formele canonice ale conexiunilor proiective liniare ale spațiilor P_2 . De problema determinării spațiilor P_2 cu conexiune proiectivă liniară s-au ocupat T. Postelnicu [5] și M. Stoka [6], folosind alte metode.

BIBLIOGRAFIE

1. O. Boruvka: *Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectifs*; Publ. Fac. Sc. Brno, nr. 85, 1926.
2. G. Vrănceanu: *Transformazioni puntuali tra spazi affini o proiettivi e spazi a connessione affine euclidea*, Boll. Un. Mat. It., ser. 3, vol. 12, nr. 1, 1957, p. 145—153.
3. G. Vrănceanu: *Leçons de Geometrie differentielle*, vol. II. Ed. de L'Acad. R.P.R., 1957; vol. III, Ed. de l'Acad. R.P.R., Bucarest et Ed. Gauthier Villars, Paris, 1964.
4. G. Vrănceanu: *Sul tensore associato ad una corrispondenza fra spazi proiettivi*, Boll. Un. Mat. It., ser. 3 vol. 12, nr. 4, 1957, p. 489—506.
5. G. Postelnicu: *Asupra corespondențelor între două plane proiective*, Lucrările Consfătuirii de geometrie și topologie (Iași, 2—5 iunie 1958), Ed. Acad. R.P.R., 1962, p. 179—183.
5. G. Postelnicu: *Linear connections associated with the projective plane*, Rev. de Math pures et appliquées, Acad. R.P.R., t. IV, nr. 1, 1959.
6. M. Stoka: *Sur les correspondances entre des espaces projectifs à connexion projective linéaire*, Českoslovački Matematiceskí jurnál, Praga, t. 13 (88), 1963.

К ВОПРОСУ О СООТВЕТСТВИЯХ МЕЖДУ ПРОЕКТИВНЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ С ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗЬЮ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Демонстрируется результат:

В предположении, что существует соответствие между двумя проективными плоскостями, можно аффинностью свести π_{22}^1 (или π_{22}^1 и π_{11}^2) к нулю, если данное соответствие не допускает две конгруэнтности мнимых прямых, как семейства характеристических кривых.

SUR LES CORRESPONDANCES ENTRE DES ESPACES PROJECTIFS A CONNEXION LINEAIRE

RÉSUMÉ

On demontre le résultat:

Etant donnée une correspondance entre deux plans projectifs, par une affinité on peut réduire la composante π_{22}^1 (ou π_{22}^1 et π_{11}^2) à zero, si la correspondance n'admet pas deux congruences de droites imaginaires comme familles de courbes caractéristiques.

ASUPRA UNEI ECUAȚII INTEGRALE CU NUCLEU DE TIP HILBERT

I. L. POPESCU

1. În teoria hidrodinamică a rețelelor de profile simplu periodice, ca și în alte probleme de Hidro-aerodinamică și Analiză matematică, se deduc ecuații integrale singulare de forma

$$(1) \quad \frac{1}{\tau} \int_{-a}^a f(\xi) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\tau} (x - \xi) d\xi = g(x),$$

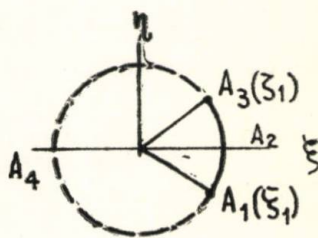
unde integrala se ia în valoare principală în sensul lui Cauchy, $f(x)$ fiind funcția necunoscută, $g(x)$ o funcție dată* iar τ o constantă reală determinată.

Ecuații integrale singulare de acest tip au fost considerate de către mai mulți cercetători. D. Hilbert [1] a redus studiul lor la acela al unor ecuații integrale de tip Fredholm. Un studiu sistematic al acestei chestiuni a făcut H. Villat [2] care a obținut pe o cale indirectă inversiunea ecuațiilor integrale de forma (1), întâlnite de autor în cercetările sale în legătură cu unele probleme de Hidrodinamică și Analiză matematică.

2. În cele ce urmează vom demonstra că soluțiile ecuațiilor integrale de forma (1) se pot deduce din rezolvarea problemelor de felul următor: *să se determine, dacă există, o funcție olomorfă în cercul de rază unitate, când se cunoaște partea sa reală pe un arc al circumferinței și partea sa imaginară pe arcul complementar.*

Într-adevăr, fie în planul complex $\zeta = \xi + i\eta$ o funcție $F(\zeta) = U(\xi, \eta) + iV(\xi, \eta)$, olomorfă în interiorul unui cerc de rază unitate, mărginită pe circumferința sa, în afară poate de extremitățile celor două arce ce formează circumferința, și care verifică următoarele condiții de limită:

$$(2) \quad \begin{cases} U = 0 \text{ pe arcul } A_3 A_4 A_1 \\ V = g_1(\sigma) \text{ pe arcul } A_1 A_2 A_3 \end{cases}$$



* Funcția $g(x)$ este dată în intervalul $(-a, a)$ precum și în intervalele congruente mod τ cu acesta unde este aceeași și depinde de forma profilului din rețea.

unde

$$(3) \quad \sigma = \frac{2\pi x}{\tau}, \quad (-a \leq x \leq a)$$

este unghiul de centru. Valorile limită $f_1(x)$ * pe care le ia U pe arcul $A_1 A_2 A_3$ vor verifica o condiție Hölder în vecinătatea fiecărui punct în care $g_1(\sigma)$ verifică o astfel de condiție. Dacă reprezentăm pe $F(\zeta)$ ca soluție a problemei lui Dirichlet pentru datele

$$(4) \quad \begin{cases} U = 0 & \text{pe arcul } A_3, A_4 A_1 \\ U = f_1(\sigma) & \text{pe arcul } A_1 A_2 A_3 \end{cases}$$

avem,

$$(5) \quad F(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} f_1(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta} d\sigma + i k,$$

unde k e o constantă reală oarecare, iar $\sigma_1 = \frac{2\pi a}{\tau}$. Să facem pe ζ să tindă, pe un drum netangent, către un punct e^{is} de pe arcul $A_1 A_2 A_3$ ($-\sigma_1 \leq s \leq \sigma_1$). Din teoria integralei Poisson-Schwarz se știe că în acest caz avem

$$(6) \quad g_1(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} f_1(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{s - \sigma}{2} d\sigma,$$

integrala fiind considerată în valoare principală în sensul lui Cauchy. Se verifică imediat că prin substituția (3), (6) devine (1).

Funcția $F(\zeta) = U(\xi, \eta) + i V(\xi, \eta)$, definită prin condițiile la limită (4), va putea fi prelungită analitic în exteriorul cercului dat, U luând valori egale și de semne contrarii în puncte inverse față de cerc, iar V luând valori egale și de același semn. Așa dar, funcția $F(\zeta)$ va reprezenta de asemenea soluția problemei lui Dirichlet pentru întreg planul ζ în care s-a făcut o tăietură circulară după arcul $A_1 A_2 A_3$, datele pe contur fiind

$$(7) \quad \begin{cases} U = f_1(\sigma) & \text{pe marginea interioară a tăieturii} \\ U = -f_1(\sigma) & \text{pe marginea exterioară a tăieturii} \end{cases}$$

$$(-\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_1)$$

Reciproc, din aceste condiții rezultă că $U = 0$ pe arcul $A_3 A_4 A_1$ și că deci soluția problemei puse va fi exprimată de (5), în virtutea unicității soluției problemei lui Dirichlet.

* Funcțiile $f_1(\sigma)$ și $g_1(\sigma)$ sînt ceea ce devin funcțiile $f(x)$ și $g(x)$ prin aplicarea substituției (3). Din (3) se vede că atunci cînd x descrie intervalul $(-a, a)$ precum și intervalele ale căror puncte diferă de punctele intervalului menționat cu un număr întreg de τ , $\zeta = e^{i\sigma}$ descrie unul și același arc $A_1 A_2 A_3$.

3. Vom determina pe $F(\zeta)$ direct, printr-o metodă pe care am indicat-o în *Lucrarea de Diplomă* (1952). În acest scop introducem funcția

$$(8) \quad G(\zeta) = \sqrt{\frac{\bar{\zeta}_1 - \zeta}{\zeta_1 - \zeta}} e^{-i\frac{\sigma_1}{2}},$$

unde bara înseamnă că se ia valoarea imaginară conjugată. Luând determinația radicalului care în origine are valoarea $e^{i\sigma_1}$, această funcție are proprietățile:

$$(9) \quad G(\zeta) = \begin{cases} i \sqrt{\frac{\sin \frac{\sigma_1 - \sigma}{2}}{\sin \frac{\sigma_1 + \sigma}{2}}} & \text{pe arcul } A_1 A_2 A_3 \\ - \sqrt{\frac{\sin \frac{\sigma_1 - \sigma}{2}}{\sin \frac{\sigma_1 + \sigma}{2}}} & \text{pe arcul } A_3 A_4 A_1 \end{cases}$$

În plus ea e olomoră în tot planul în care s-a făcut tăietura $A_1 A_2 A_3$, mărginită pe acest arc în afară de punctul $\zeta = \zeta_1$ unde devine infinită. Atunci funcția $F(\zeta)G(\zeta)$ va fi olomoră în exteriorul arcului $A_1 A_2 A_3$ mărginită pe acest arc în afară de extremități unde este integrabilă și va satisface condițiile

$$(10) \quad \begin{cases} \operatorname{Re} \{F(\zeta) G(\zeta)\} = 0 & \text{pe arcul } A_3 A_4 A_1 \\ \operatorname{Re} \{F(\zeta) G(\zeta)\} = -g_1(\sigma) \sqrt{\frac{\sin \frac{\sigma_1 - \sigma}{2}}{\sin \frac{\sigma_1 + \sigma}{2}}} & \text{pe arcul } A_1 A_2 A_3 \end{cases}$$

Folosind formula (5), găsim

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\bar{\zeta}_1 - \zeta}{\zeta_1 - \zeta}} e^{i\frac{\sigma_1}{2}} \left[\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} -g_1(\sigma) \sqrt{\frac{\sin \frac{\sigma_1 - \sigma}{2}}{\sin \frac{\sigma_1 + \sigma}{2}}} \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta} d\sigma + ik \right].$$

Determinăm constanta k astfel ca $F(\zeta)$ să nu mai posede singularitatea din $\zeta = \zeta_1$ și găsim

$$k = - \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} g_1(\sigma) \sqrt{\frac{\sin \frac{\sigma_1 - \sigma}{2}}{\sin \frac{\sigma_1 + \sigma}{2}}} \operatorname{ctg} \frac{\sigma - \sigma_1}{2} d\sigma.$$

Așa dar, vom avea

$$(11) \quad F(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\bar{\zeta}_1 - \zeta}{\zeta_1 - \zeta}} e^{i\frac{\sigma_1}{2}} \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} g_1(\sigma) \sqrt{\frac{\sin \frac{\sigma_1 - \sigma}{2}}{\sin \frac{\sigma_1 + \sigma}{2}}} \left[\frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta} + i \operatorname{ctg} \frac{\sigma - \sigma_1}{2} \right] d\sigma.$$

Revenind la variabila inițială prin substituția (3), se găsește că avem

$$f(x) = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{\sin \frac{\pi}{\tau} (a+x)}{\sin \frac{\pi}{\tau} (a-x)}} \int_{-a}^a g(\xi) \sqrt{\frac{\sin \frac{\pi}{\tau} (a-\xi)}{\sin \frac{\pi}{\tau} (a+\xi)}} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi}{\tau} (\xi - x) - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\tau} (\xi - a) \right] d\xi.$$

Prin transformări elementare, $f(x)$ se poate pune sub forma

$$(12) \quad f(x) = \frac{1}{\tau} \sqrt{\sin^2 \frac{\pi a}{\tau} - \sin^2 \frac{\pi x}{\tau}} \int_{-a}^a \frac{g(\xi)}{\sqrt{\sin^2 \frac{\pi a}{\tau} - \sin^2 \frac{\pi \xi}{\tau}}} \frac{d\xi}{\sin \frac{\pi(\xi - x)}{\tau}}.$$

În particular, pentru $\tau \rightarrow \infty$, se obțin soluțiile lui H. Söhnngen [3] pentru cazul unui singur profil

$$(13) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{a^2 - x^2} \int_{-a}^a \frac{g(\xi)}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \frac{d\xi}{\xi - x}.$$

Soluțiile date de H. Söhnngen au fost regăsite, pe o altă cale, de C. Iacob, [4] Condițiile problemei cercetate de acești autori cerînd ca soluția problemei la limită să se anuleze la infinit, lucru ce se poate realiza ușor, soluția (13) apare sub o formă puțin diferită.

4. *Observări:* a) În cazul profilului izolat, funcția $g(x)$ va căpăta altă expresie, avînd în vedere că acum nu mai are sens să se vorbească de o viteză asimptotică medie, ca pentru o rețea de profile.

b) Dacă τ este pur imaginar, se găsesc aceleași rezultate, însă funcțiile circulare se transformă în funcții hiperbolice.

BIBLIOGRAFIE

1. D. Hilbert: Congrès des Mathém. Heidelberg, 1904, Verhandlungen, p. 233.
2. H. Villat: Sur la résolutions de certains équations intégrales et sur quelques problèmes qui s'y rattachent, Acta Mathematica, 40, p. 101—178 (1916)
3. H. Söhnngen: Die Lösung der Integralgleichung $g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{f(\xi)}{x - \xi} d\xi$ und deren Anwendung in der Tragflügeltheorie, Math. Zeitschrift, 45 Band, p. 245, (1939).
4. C. Iacob: Sur une équation intégrale singulière, Mathematica, vol. XXII, p. 153—156 (1947)

О СИНГУЛЯРНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ С ЯДРОМ ГИЛЬБЕРТА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Автор предлагает метод интегрирования класса сингулярных интегральных уравнений, которые встречаются в гидродинамической теории решёток профилей.

SUR UNE ÉQUATION INTÉGRALE SINGULIÈRE À NOYAU HILBERT

R É S U M É

L'auteur propose une méthode d'intégration d'une classe d'équations intégrales singulières qui interviennent dans la théorie hydrodynamique des grilles de profils.

ASUPRA UNOR PROBLEME DINAMICE ALE TEORIEI ELASTICITĂȚII

P. P. TEODORESCU

1. Problemele elastodinamicii au constituit obiectul a numeroase studii; în special, s-au dat formulări generale ale problemelor la limită pentru cazul corpului omogen, izotrop și liniar elastic.

În anii 1959 și 1960, J. Ignaczak [2] și noi [6], [7] am dedus ecuațiile lui Beltrami pentru problema tridimensională dinamică a teoriei elasticității.

În cele ce urmează vom expune unele din rezultatele obținute [6] [7] în cazul elastodinamicii liniare și vom da o formulare în tensiuni a problemei tridimensionale corespunzătoare. Folosind aceste rezultate se vor studia vibrațiile proprii și vibrațiile staționare pentru domenii finite în formă de paralelipiped ca și pentru toate domeniile infinite ce se pot obține din acesta prin aruncarea la infinit a uneia sau mai multe din fețele sale (de exemplu, semispațiul elastic, sfertul de spațiu elastic, optimea de spațiu elastic, stratul elastic, banda elastică etc). Deoarece în aceste probleme apar direcții privilegiate nu vom folosi calculul tensorial.

2. Tensiunile normale se exprimă sub forma ¹

$$\sigma_x = \square_1 F_x - \frac{3}{2 + \mu} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\mu(1 + \mu)}{1 - \mu} \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] F \quad (1)$$

iar tensiunile tangențiale vor fi date de

$$\tau_{yz} = -\frac{3}{2 + \mu} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + \varphi_x + \frac{\partial}{\partial x} (F_{xy} - F_{zx}) + \frac{1}{2c_z^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (f_{xy} + f_{zx}). \quad (1')$$

Componentele vectorului deplasare sînt

$$\begin{aligned} & \frac{E}{1 + \mu} [u - (-y\omega_z^0 + z\omega_y^0 + u_0)] = \\ & = \square_1 \left\{ \left(F_x - \frac{3\mu}{2 + \mu} F \right) dx - \frac{3}{2 + \mu} \frac{\partial F}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) f_{yz} \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

¹ În cadrul punctelor 2 și 3, celalalte formule se obțin prin permutări circulare.

Funcțiile de tensiune $F_x(x, y, z; t)$, $F_y(x, y, z; t)$, $F_z(x, y, z; t)$ verifică dubla ecuație a undelor

$$\square_1 \square_2 \Omega(x, y, z; t) = 0, \quad (3)$$

unde am introdus operatorii lui d'Alembert

$$\square_i = \Delta - \frac{1}{c_i^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2) \quad (4)$$

iar Δ este operatorul lui Laplace

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (5)$$

Vitezele de propagare a undelor sînt date de

$$\frac{1}{c_1^2} = \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{1 - \mu} \frac{\rho}{E}, \quad \frac{1}{c_2^2} = 2(1 + \mu) \frac{\rho}{E}. \quad (6)$$

Indicele 1 corespunde la undele primare P, unde longitudinale de dilatație și condensare cu rotația nulă (unde irotaționale), iar indicele 2 indică undele secundare S, unde transversale, care corespund la o deformare sub volum constant (unde incompresibile).

S-a introdus și notația

$$F = \frac{1}{3} (F_x + F_y + F_z). \quad (7)$$

Mai sus s-a notat cu ρ masa specifică, E fiind modulul de elasticitate longitudinală al lui Young iar μ coeficientul de contracție transversală al lui Poisson.

Funcțiile $\varphi_x(x, y, z; t)$, $\varphi_y(x, y, z; t)$, $\varphi_z(x, y, z; t)$ verifică ecuația simplă a undelor

$$\square_2 \varphi(x, y, z; t) = 0 \quad (8)$$

și sînt integrale particulare ale sistemului de ecuații

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} = \\ & = - \frac{\partial}{\partial x} \square_1 \left(F_x - \frac{3}{2 + \mu} F \right) + \frac{1}{2c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \square_1 \int \left(F_x - \frac{3\mu}{2 + \mu} F \right) dx. \end{aligned} \quad (9)$$

Drept integrale particulare pot fi alese funcțiile

$$\begin{aligned} \varphi_x = & \frac{3\mu}{2(2 + \mu)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \iint \square_1 F dy dz + \\ & + \frac{1}{2} \square_1 \left(\int \frac{\partial F_y}{\partial z} dy + \int \frac{\partial F_z}{\partial y} dz \right), \end{aligned} \quad (10)$$

care verifică ecuația (8); trebuie avut totuși grijă ca funcțiile arbitrare ce apar prin integrare să fie determinate astfel ca sistemul (9) să fie satisfăcut.

Funcțiile de două variabile spațiale $F_{yz}(y, z; t)$, $F_{zx}(z, x; t)$, $F_{xy}(x, y; t)$ verifică de asemenea ecuația (8) și folosesc la îndeplinirea condițiilor la limită de către tensiunile tangențiale.

Funcțiile $f_{yz}(y, z; t)$, $f_{zx}(z, x; t)$, $f_{xy}(x, y; t)$ sînt integrale particulare ale sistemului de ecuații cu variabile spațiale separate

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{1}{c_z^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f_{xy} + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} - \frac{1}{c_z^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f_{zx} = \\ & = 2 \frac{\partial}{\partial x} (F_{xy} - F_{zx}) + \frac{3\mu}{2 + \mu} \square_1 \left[\int \frac{\partial F}{\partial z} dy + \int \frac{\partial F}{\partial y} dz + \right. \\ & \quad \left. + \iint \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_z^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) F dy dz \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Constantele u_0 , v_0 , w_0 , ω_x^0 , ω_y^0 , ω_z^0 corespund la deplasările, respectiv la rotațiile corpului ca un solid rigid și se determină prin condiții de fixitate în spațiu.

La aceste ecuații se adaugă condițiile la limită, care — pentru prima problemă fundamentală — sînt de forma

$$p_{nx} = \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{zx} \cos(n, z) \quad (t \geq t_0), \quad (12)$$

unde $p_{nx}(t)$, $p_{ny}(t)$, $p_{nz}(t)$ este încărcarea pe un element de contur de normală exterioară $\vec{n}$.

Condițiile inițiale au forma

$$t = t_0: \quad u = f(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = g(x, y, z). \quad (13)$$

3. În baza teoremei lui T. Boggio [1], se poate exprima integrala generală a ecuației (3) sub forma

$$\Omega(x, y, z; t) = \chi(x, y, z; t) + \varkappa(x, y, z; t), \quad (14)$$

unde funcțiile χ și $\varkappa$ verifică ecuația simplă a undelor

$$\square_1 \chi(x, y, z; t) = 0, \quad (15)$$

respectiv ecuația (8).

Această reducere a problemei la două ecuații simple ale undelor permite descompunerea undelor elastice în unde primare și secundare.

Fie astfel

$$F_x(x, y, z; t) = F_{1x}(x, y, z; t) + F_{2x}(x, y, z; t), \quad (16)$$

cu

$$\square_i F_{ix} = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (17)$$

Introducînd notații analoage

$$F_i = \frac{1}{3} (F_{ix} + F_{iy} + F_{iz}) \quad (i = 1, 2) \quad (18)$$

și

$$F = F_1 + F_2, \quad (19)$$

putem exprima starea de tensiune sub forma

$$\sigma_x = \sigma_x^1 + \sigma_x^2, \quad (20)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{yz}^1 + \tau_{yz}^2 \quad (20')$$

și starea de deformație prin

$$u = u_1 + u_2. \quad (21)$$

4. Remarcăm că este convenabil să folosim funcții de tensiune care se construiesc cu ajutorul unor integrale particulare ale ecuației undelor, avînd forma

$$e^{\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t}, \quad (22)$$

unde este îndeplinită relația

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \frac{1}{c^2} \delta^2 = 0. \quad (23)$$

În acest caz, funcțiile arbitrare care intervin în expresiile (10) ale funcțiilor φ_x , φ_y , φ_z , ca și funcțiile f_{yz} , f_{zx} , f_{xy} pot fi luate egale cu zero.

Prin suprapunerea efectelor se pot obține serii Fourier și integrale Fourier care sînt utile pentru rezolvarea a diferite probleme concrete la limită, în special pentru domenii care sînt mărginite de plane paralele cu planele coordonate.

Dacă condițiile pe contur nu sînt omogene se obțin vibrații forțate, unde încărcarea pe contur acționează ca o forță perturbatoare (de exemplu, cazul vibrațiilor staționare). În cazul unor condiții la limită omogene (fără sarcină exterioară) se obține o ecuație caracteristică care precizează vibrațiile proprii ale corpului elastic.

În aceste două cazuri nu sînt necesare condiții inițiale, ceea ce simplifică considerabil problema.

În cazul unor vibrații nestaționare se poate utiliza o transformare Laplace cu condiții inițiale omogene, problema reducîndu-se astfel formal la o problemă staționară.

5. Fie semispațiul elastic $z \geq 0$, acționat pe planul de separație de o sarcină normală periodică de forma

$$p(x, y; t) = p(x, y) \sin \omega t. \quad (24)$$

Pentru simplificarea calculului s-a luat un singur termen din dezvoltarea în raport cu timpul; aceste rezultate pot folosi, prin suprapunerea efectelor, pentru o serie Fourier sau o integrală Fourier în raport cu timpul.

Fie, de exemplu, o sarcină normală periodică în raport cu variabilele x și y și antisimetrică în raport cu ambele axe de coordonate

$$p(x, y) = \sum_n \sum_m a_{nm} \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \quad (25)$$

cu

$$\gamma_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \delta_m = \frac{m\pi}{b} \quad (n, m = 1, 2, 3, \dots), \quad (26)$$

perioadele fiind $L_x = 2a$ și $L_y = 2b$.

Căzuri de încărcare cu alte proprietăți de simetrie sau de antisimetrie în raport cu axele de coordonate ca și cazuri de încărcare tangențiale pot fi studiate în mod analog.

Se aleg funcțiile de tensiune, impare în raport cu x și y , de forma

$$\begin{aligned} F_x(x, y, z; t) &= \sin \omega t \sum_n \sum_m (A'_{nm} e^{-\alpha_{nm} z} + B'_{nm} e^{-\beta_{nm} z}) \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \\ F_y(x, y, z; t) &= \sin \omega t \sum_n \sum_m (A''_{nm} e^{-\alpha_{nm} z} + B''_{nm} e^{-\beta_{nm} z}) \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \\ F_z(x, y, z; t) &= \sin \omega t \sum_n \sum_m (A'''_{nm} e^{-\alpha_{nm} z} + B'''_{nm} e^{-\beta_{nm} z}) \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \end{aligned} \quad (27)$$

cu condițiile

$$\gamma_n^2 + \delta_m^2 = \alpha_{nm}^2 + \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{1 - \mu} \frac{\rho}{E} \omega^2 = \beta_{nm}^2 + 2(1 + \mu) \frac{\rho}{E} \omega^2. \quad (28)$$

Șirurile de coeficienți se determină prin condițiile pe contur

$$z = 0: \quad \sigma_z = p(x, y, t), \quad \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0. \quad (29)$$

Observăm de asemenea că, prin modul de a alege funcțiile de tensiune, componentele tensorului tensiune tind către zero pentru $z \rightarrow \infty$. Funcțiile de două variabile spațiale vor fi luate egale cu zero

$$F_{yz} = F_{zx} = F_{xy} = 0. \quad (30)$$

Analog, prin modul de a alege funcțiile de tensiune, se observă că funcțiile $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ au forma (10) și că funcțiile f_{yz}, f_{zx}, f_{xy} pot fi luate tot egale cu zero

$$f_{yz} = f_{zx} = f_{xy} = 0. \quad (31)$$

După cum s-a arătat în [9], rezultă starea de tensiune

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\sin \omega t \sum_n \sum_m \frac{a_{nm}}{N_{nm}} \{ [(1 - \mu) \alpha_{nm}^2 + \mu \beta_{nm}^2] [\mu (\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2) + \gamma_n^2] e^{-\alpha_{nm} z} - \\ &\quad - \alpha_{nm} \beta_{nm} \gamma_n^2 e^{-\beta_{nm} z} \} \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \\ \sigma_y &= -\sin \omega t \sum_n \sum_m \frac{a_{nm}}{N_{nm}} \{ [(1 - \mu) \alpha_{nm}^2 + \mu \beta_{nm}^2] [\mu (\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2) + \delta_m^2] e^{-\alpha_{nm} z} - \\ &\quad - \alpha_{nm} \beta_{nm} \delta_m^2 e^{-\beta_{nm} z} \} \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_z &= \sin \omega t \sum_n \sum_m \frac{a_{nm}}{N_{nm}} \{ [(1 - \mu) \alpha_{nm}^2 + \mu \beta_{nm}^2] e^{-\alpha_{nm} z} - \\
&\quad - \alpha_{nm} \beta_{nm} (\gamma_n^2 + \delta_m^2) e^{-\beta_{nm} z} \} \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \\
\tau_{yz} &= - \sin \omega t \sum_n \sum_m \frac{a_{nm}}{N_{nm}} \alpha_{nm} \delta_m [(1 - \mu) \alpha_{nm}^2 + \mu \beta_{nm}^2] (e^{-\alpha_{nm} z} - \\
&\quad - e^{-\beta_{nm} z}) \sin \gamma_n x \cos \delta_m y, \\
\tau_{zx} &= - \sin \omega t \sum_n \sum_m \frac{a_{nm}}{N_{nm}} \alpha_{nm} \gamma_n [(1 - \mu) \alpha_{nm}^2 + \mu \beta_{nm}^2] (e^{-\alpha_{nm} z} - \\
&\quad - e^{-\beta_{nm} z}) \cos \gamma_n x \sin \delta_m y, \\
\tau_{xy} &= \sin \omega t \sum_n \sum_m \frac{a_{nm}}{N_{nm}} \gamma_n \delta_m \{ [(1 - \mu) \alpha_{nm}^2 + \mu \beta_{nm}^2] e^{-\alpha_{nm} z} - \\
&\quad - \alpha_{nm} \beta_{nm} e^{-\beta_{nm} z} \} \cos \gamma_n x \cos \delta_m y
\end{aligned} \tag{32}$$

și starea de deformație

$$\begin{aligned}
\frac{E}{1 + \mu} (u + \omega_0 y) &= \sin \omega t \sum_n \sum_m \frac{a_{nm}}{N_{nm}} \gamma_n \{ [(1 - \mu) \alpha_{nm}^2 + \mu \beta_{nm}^2] e^{-\alpha_{nm} z} - \\
&\quad - \alpha_{nm} \beta_{nm} e^{-\beta_{nm} z} \} \cos \gamma_n x \sin \delta_m y, \\
\frac{E}{1 + \mu} (v - \omega_0 x) &= \sin \omega t \sum_n \sum_m \frac{a_{nm}}{N_{nm}} \delta_m \{ [(1 - \mu) \alpha_{nm}^2 + \mu \beta_{nm}^2] e^{-\alpha_{nm} z} - \\
&\quad - \alpha_{nm} \beta_{nm} e^{-\beta_{nm} z} \} \sin \gamma_n x \cos \delta_m y, \\
\frac{E}{1 + \mu} \omega &= - \sin \omega t \sum_n \sum_m \frac{a_{nm}}{N_{nm}} \alpha_{nm} \{ [(1 - \mu) \alpha_{nm}^2 + \mu \beta_{nm}^2] e^{-\alpha_{nm} z} - \\
&\quad - (\gamma_n^2 + \delta_m^2) e^{-\beta_{nm} z} \} \sin \gamma_n x \sin \delta_m y,
\end{aligned} \tag{33}$$

unde, din motive de simetrie, mai trebuie precizată numai rotația de corp rigid ω_0 .

Aici s-a introdus numitorul

$$N_{nm} = \frac{1}{4} (\beta_{nm}^2 + \gamma_n^2 + \delta_m^2)^2 - \alpha_{nm} \beta_{nm} (\gamma_n^2 + \delta_m^2). \tag{34}$$

Forma deformată a planului de separație va fi dată de

$$w(x, y, 0; t) = (1 + \mu)^2 \frac{\rho}{E} \omega^2 \sin \omega t \sum_n \sum_m \frac{a_{nm}}{N_{nm}} \alpha_{nm} \sin \gamma_n x \sin \delta_m y. \tag{35}$$

Se observă că seriile folosite sînt uniform convergente iar seria (35) converge rapid.

În cazul unei sarcini locale se pot folosi integrale Fourier în raport cu variabilele x și y , ca și în cazul static [5].

6. În cazul semispațiului elastic $z \geq 0$ fără sarcini exterioare, putem alege funcții de tensiune de forma

$$\begin{aligned} F_x(x, y, z; t) &= \sum_n \sum_m (\bar{C}_{nm} \sin \omega_{nm} t + \bar{D}_{nm} \cos \omega_{nm} t) \times \\ &\quad \times (A'_{nm} e^{-\alpha_{nm} z} + B'_{nm} e^{-\beta_{nm} z}) \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \\ F_y(x, y, z; t) &= \sum_n \sum_m (\bar{C}_{nm} \sin \omega_{nm} t + \bar{D}_{nm} \cos \omega_{nm} t) \times \\ &\quad \times (A''_{nm} e^{-\alpha_{nm} z} + B''_{nm} e^{-\beta_{nm} z}) \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \\ F_z(x, y, z; t) &= \sum_n \sum_m (\bar{C}_{nm} \sin \omega_{nm} t + \bar{D}_{nm} \cos \omega_{nm} t) \times \\ &\quad \times (A'''_{nm} e^{-\alpha_{nm} z} + B'''_{nm} e^{-\beta_{nm} z}) \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \end{aligned} \quad (36)$$

cu relațiile de condiție

$$\gamma_n^2 + \delta_m^2 = \alpha_{nm}^2 + \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{1-\mu} \frac{\rho}{E} \omega_{nm}^2 = \beta_{nm}^2 + 2(1+\mu) \frac{\rho}{E} \omega_{nm}^2. \quad (37)$$

Componentele tensorului tensiune vor tinde către zero pentru $z \rightarrow \infty$ iar șirurile de coeficienți A'_{nm} , B'_{nm} , ..., B'''_{nm} se precizează prin condițiile la limită

$$z = 0: \quad \sigma_z = 0, \quad \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0. \quad (38)$$

Introducând notațiile

$$\begin{aligned} C_{nm} &= -\frac{1}{2+\mu} A_{nm} \bar{C}_{nm} (\gamma_n^2 + \delta_m^2), \\ D_{nm} &= -\frac{1}{2+\mu} A_{nm} \bar{D}_{nm} (\gamma_n^2 + \delta_m^2), \end{aligned} \quad (39)$$

putem exprima starea de tensiune sub forma

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\sum_n \sum_m (C_{nm} \sin \omega_{nm} t + D_{nm} \cos \omega_{nm} t) \left\{ \frac{\gamma_n^2}{\gamma_n^2 + \delta_m^2} \left[e^{-\alpha_{nm} z} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(1 - \frac{1}{2\chi} \right) e^{-\beta_{nm} z} \right] + \frac{\mu}{2(1-\mu)\chi} e^{-\alpha_{nm} z} \right\} \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \\ \sigma_y &= -\sum_n \sum_m (C_{nm} \sin \omega_{nm} t + D_{nm} \cos \omega_{nm} t) \left\{ \frac{\delta_m^2}{\gamma_n^2 + \delta_m^2} \left[e^{-\alpha_{nm} z} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(1 - \frac{1}{2\chi} \right) e^{-\beta_{nm} z} \right] + \frac{\mu}{2(1-\mu)\chi} e^{-\alpha_{nm} z} \right\} \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_z &= \left(1 - \frac{1}{2\chi}\right) \sum_n \sum_m (C_{nm} \sin \omega_{nm} t + D_{nm} \cos \omega_{nm} t) (e^{-\alpha_{nm} z} - \\
&\quad - e^{-\beta_{nm} z}) \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \\
\tau_{yz} &= - \sum_n \sum_m (C_{nm} \sin \omega_{nm} t + D_{nm} \cos \omega_{nm} t) \frac{\alpha_{nm} \delta_m}{\gamma_n^2 + \delta_m^2} (e^{-\alpha_{nm} z} - \\
&\quad - e^{-\beta_{nm} z}) \sin \gamma_n x \cos \delta_m y, \\
\tau_{zx} &= - \sum_n \sum_m (C_{nm} \sin \omega_{nm} t + D_{nm} \cos \omega_{nm} t) \frac{\alpha_{nm} \gamma_n}{\gamma_n^2 + \delta_m^2} (e^{-\alpha_{nm} z} - \\
&\quad - e^{-\beta_{nm} z}) \cos \gamma_n x \sin \delta_m y, \\
\tau_{xy} &= \sum_n \sum_m (C_{nm} \sin \omega_{nm} t + D_{nm} \cos \omega_{nm} t) \frac{\gamma_n \delta_m}{\gamma_n^2 + \delta_m^2} \left[e^{-\alpha_{nm} z} - \right. \\
&\quad \left. - \left(1 - \frac{1}{2\chi}\right) e^{-\beta_{nm} z} \right] \cos \gamma_n x \cos \delta_m y.
\end{aligned} \tag{40'}$$

Starea de deformare va fi dată de

$$\begin{aligned}
\frac{E}{1 + \mu} (u + \omega_z^0 y) &= \sum_n \sum_m (C_{nm} \sin \omega_{nm} t + D_{nm} \cos \omega_{nm} t) \frac{\gamma_n}{\gamma_n^2 + \delta_m^2} \left[e^{-\alpha_{nm} z} - \right. \\
&\quad \left. - \left(1 - \frac{1}{2\chi}\right) e^{-\beta_{nm} z} \right] \cos \gamma_n x \sin \delta_m y, \\
\frac{E}{1 + \mu} (v - \omega_z^0 x) &= \sum_n \sum_m (C_{nm} \sin \omega_{nm} t + D_{nm} \cos \omega_{nm} t) \frac{\delta_m}{\gamma_n^2 + \delta_m^2} \left[e^{-\alpha_{nm} z} - \right. \\
&\quad \left. - \left(1 - \frac{1}{2\chi}\right) e^{-\beta_{nm} z} \right] \sin \gamma_n x \cos \delta_m y, \\
\frac{E}{1 + \mu} \omega &= - \sum_n \sum_m (C_{nm} \sin \omega_{nm} t + D_{nm} \cos \omega_{nm} t) \frac{\alpha_{nm}}{\gamma_n^2 + \delta_m^2} \left[e^{-\alpha_{nm} z} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2\chi}{2\chi - 1} e^{-\beta_{nm} z} \right] \sin \gamma_n x \sin \delta_m y,
\end{aligned} \tag{41}$$

rotirea de corp rigid ω_z^0 trebuind să fie precizată printr-o condiție suplimentară de punct fix a semispațiului elastic.

Mărimea adimensională χ va fi dată de ecuația de gradul al treilea

$$\chi^3 - (2 - \mu) \chi^2 + (1 - \mu) \chi - \frac{1}{8} (1 - \mu) = 0, \tag{42}$$

care are o singură rădăcină reală; se obține deci un singur șir de valori proprii ca și în cazul unei stări de deformare plană [8].

A fost introdusă notația

$$\chi = \left(\frac{c_2}{c} \right)^2, \tag{43}$$

cu viteza de propagare a undelor Rayleigh dată de

$$c = \frac{\omega_{nm}}{\sqrt{\gamma_n^2 + \delta_m^2}}. \quad (44)$$

Prin alegerea funcțiilor de tensiune (36) în $\cos \gamma_n x$ sau în $\cos \delta_m y$ se ajunge la rezultate analoge și la același șir de valori proprii.

Pe această cale se obține o stare de tensiune și o stare de deformare pentru unde de tip Rayleigh, care generalizează rezultatele clasice [3], [4], considerate și în [8].

7. Analog se poate studia cazul vibrațiilor staționare și pentru alte domenii infinite, mărginite de plane paralele cu planele coordonate, așa cum s-a făcut și în cazul static [5].

În cazul stratului elastic $|z| \leq c$, acționat de o sarcină normală periodică, simetrică în raport cu planul $z = 0$, pe planele $z = \pm c$, se introduc funcțiile de tensiune

$$F_x(x, y, z; t) = \sin \omega t \sum_n \sum_m (A'_{nm} \operatorname{ch} \alpha_{nm} z + B'_{nm} \operatorname{ch} \beta_{nm} z) \sin \gamma_n x \sin \delta_m y,$$

$$F_y(x, y, z; t) = \sin \omega t \sum_n \sum_m (A''_{nm} \operatorname{ch} \alpha_{nm} z + B''_{nm} \operatorname{ch} \beta_{nm} z) \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \quad (45)$$

$$F_z(x, y, z; t) = \sin \omega t \sum_n \sum_m (A'''_{nm} \operatorname{ch} \alpha_{nm} z + B'''_{nm} \operatorname{ch} \beta_{nm} z) \sin \gamma_n x \sin \delta_m y,$$

unde parametrii α_{nm} , β_{nm} verifică relațiile (28). Funcțiile F_{yz} , F_{zx} , F_{xy} , f_{yz} , f_{zx} , f_{xy} se iau egale cu zero.

Șirurile de coeficienți A'_{nm} , B'_{nm} , ..., B'''_{nm} vor fi precizate prin condițiile la limită

$$z = \pm c: \quad \sigma_z = p(x, y; t), \quad \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \quad (46)$$

iar starea de tensiune și starea de deformare se vor exprima tot cu ajutorul unor serii uniform convergente.

În cazul sferului de spațiu elastic $x \geq 0$, $z \geq 0$ vom admite că acționează o sarcină normală locală de forma (24), unde

$$p(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty b(\alpha, \beta) \cos \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta, \quad (47)$$

cu

$$b(\alpha, \beta) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \rho(\xi, \eta) \cos \alpha \xi \cos \beta \eta \, d\xi \, d\eta \quad (48)$$

pe planul $z = 0$.

Se introduc funcțiile de tensiune (celelalte funcții se obțin prin permutări circulare)

$$\begin{aligned} F_x(x, y, z; t) = & \sin \omega t \int_0^\infty \int_0^\infty (A'_1 e^{-\nu_1 z} + A'_2 e^{-\nu_2 z} \cos \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta + \\ & + \sin \omega t \int_0^\infty \int_0^\infty (B'_1 e^{-\lambda_1 x} + B'_2 e^{-\lambda_2 x}) \cos \beta y \cos \gamma z \, d\beta \, d\gamma, \end{aligned} \quad (49)$$

unde parametrii introduși verifică relațiile

$$\begin{aligned}\beta^2 + \gamma^2 &= \lambda_1^2 + \frac{1}{c_1^2} \frac{\rho}{E} \omega^2 = \lambda_2^2 + \frac{1}{c_2^2} \frac{\rho}{E} \omega^2, \\ \alpha^2 + \beta^2 &= \nu_1^2 + \frac{1}{c_1^2} \frac{\rho}{E} \omega^2 = \nu_2^2 + \frac{1}{c_2^2} \frac{\rho}{E} \omega^2.\end{aligned}\quad (50)$$

Funcțiile $A'_1(\alpha, \beta)$, $A'_2(\alpha, \beta)$, ..., $B''_2(\beta, \gamma)$ vor fi precizate prin condițiile pe contur

$$\begin{aligned}x = 0: \quad \sigma_x &= 0, & \tau_{xy} &= \tau_{xz} = 0, \\ z = 0: \quad \sigma_z &= p(x, y; t), & \tau_{zx} &= \tau_{zy} = 0.\end{aligned}\quad (51)$$

Ca și în cazul static [5], problema se reduce la integrarea unui sistem de două ecuații integrale de tip Fredholm de speța a II-a.

În cazul optimei de spațiu elastic $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, supusă unei încărcări de forma (24), (47), (48) pe suprafața $z = 0$, se introduc funcții de tensiune de forma (se folosesc permutări circulare)

$$\begin{aligned}F_x(x, y, z; t) &= \sin \omega t \int_0^\infty \int_0^\infty (A'_1 e^{-\lambda_1 x} + A'_2 e^{-\lambda_2 x}) \cos \beta y \cos \gamma z \, d\beta \, d\gamma + \\ &+ \sin \omega t \int_0^\infty \int_0^\infty (B'_1 e^{-\nu_1 y} + B'_2 e^{-\nu_2 y}) \cos \gamma z \cos \alpha x \, d\gamma \, d\alpha + \\ &+ \sin \omega t \int_0^\infty \int_0^\infty (C'_1 e^{-\nu_1 z} + C'_2 e^{-\nu_2 z}) \cos \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta,\end{aligned}\quad (52)$$

cu relațiile (50) și

$$\gamma^2 + \alpha^2 = \kappa_1^2 + \frac{1}{c_1^2} \frac{\rho}{E} \omega^2 = \kappa_2^2 + \frac{1}{c_2^2} \frac{\rho}{E} \omega^2. \quad (50')$$

Funcțiile $A'_1(\beta, \gamma)$, $A'_2(\beta, \gamma)$, ..., $C''_2(\alpha, \beta)$ se determină prin condițiile la limită

$$\begin{aligned}x = 0: \quad \sigma_x &= 0, & \tau_{xy} &= \tau_{xz} = 0, \\ y = 0: \quad \sigma_y &= 0, & \tau_{yz} &= \tau_{yx} = 0, \\ z = 0: \quad \sigma_z &= p(x, y; t), & \tau_{zx} &= \tau_{zy} = 0\end{aligned}\quad (53)$$

și problema se reduce la integrarea unui sistem de trei ecuații integrale de tip Fredholm, de speța a II-a, pentru care se poate demonstra unicitatea soluției în clasa funcțiilor generalizate.

Pentru semistratul elastic și pentru sfertul de strat elastic se folosesc funcții de tensiune formate cu serii Fourier pentru o direcție normală la planele paralele de separație și cu integrale Fourier pentru celelalte direcții.

În cazul benzii elastice $|y| \leq b$, $|z| \leq c$, acționată de sarcini normale de forma (24) cu

$$p(x, y) = \sum_l \sum_m a_{lm} \sin \alpha_l x \sin \beta_m y \quad (54)$$

pe planele de separație $z = \pm c$, se folosesc funcțiile de tensiune (cu permutări circulare)

$$F_x(x, y, z; t) = \sin \omega t \sum_l \sum_m (B'_{1nl} \operatorname{sh} \mu_{1nl} y + B'_{2nl} \operatorname{sh} \mu_{2nl} y) \sin \gamma_n z \sin \alpha_l x + \\ + \sin \omega t \sum_l \sum_m (C'_{1lm} \operatorname{sh} \nu_{1lm} z + C'_{2lm} \operatorname{sh} \nu_{2lm} z) \sin \alpha_l x \sin \beta_m y, \quad (55)$$

cu relațiile de condiție

$$\gamma_n^2 + \alpha_l^2 = \mu_{1nl}^2 + \frac{1}{c_2^2} \frac{\rho}{E} \omega^2 = \mu_{2nl}^2 + \frac{1}{c_2^2} \frac{\rho}{E} \omega^2, \\ \alpha_l^2 + \beta_m^2 = \nu_{1lm}^2 + \frac{1}{c_1^2} \frac{\rho}{E} \omega^2 = \nu_{2lm}^2 + \frac{1}{c_2^2} \frac{\rho}{E} \omega^2. \quad (56)$$

Șirurile de coeficienți B'_{1nl} , B'_{2nl} , ..., C'_{2lm} se determină prin condițiile pe contur

$$y = \pm b: \sigma_y = 0, \quad \tau_{yz} = \tau_{yx} = 0, \\ z = \pm c: \sigma_z = p(x, y; t), \quad \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \quad (57)$$

iar problema se reduce, din punct de vedere matematic, la rezolvarea unui sistem infinit de ecuații algebrice liniare cu o dublă infinitate de necunoscute.

În cazul semibenzii elastice se pot construi funcții de tensiune în mod analog, cu ajutorul seriilor și integralelor Fourier.

Fie încă paralelipipedul elastic $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, $|z| \leq c$, acționat de o sarcină de forma (24), (25), (26) pe fețele $z = \pm c$. Introducem funcțiile de tensiune (celelalte funcții se obțin prin permutări circulare)

$$F_x(x, y, z; t) = \sin \omega t \sum_m \sum_n A'_{1mn} \operatorname{sh} \lambda_{1mn} x + A'_{2mn} \operatorname{sh} \lambda_{2mn} x \sin \beta_m y \sin \gamma_n z + \\ + \sin \omega t \sum_n \sum_l (B'_{1nl} \operatorname{sh} \mu_{1nl} y + B'_{2nl} \operatorname{sh} \mu_{2nl} y) \sin \gamma_n z \sin \alpha_l x + \\ + \sin \omega t \sum_l \sum_m (C'_{1lm} \operatorname{sh} \nu_{1lm} z + C'_{2lm} \operatorname{sh} \nu_{2lm} z) \sin \alpha_l x \sin \beta_m y, \quad (58)$$

cu condițiile (56) și

$$\beta_m^2 + \gamma_n^2 = \lambda_{1mn}^2 + \frac{1}{c_1^2} \frac{\rho}{E} \omega^2 = \lambda_{2mn}^2 + \frac{1}{c_2^2} \frac{\rho}{E} \omega^2. \quad (56')$$

Cu ajutorul condițiilor pe contur

$$x = \pm a: \sigma_x = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0, \\ y = \pm b: \sigma_y = 0, \quad \tau_{yz} = \tau_{yx} = 0, \\ z = \pm c: \sigma_z = p(x, y; t), \quad \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \quad (59)$$

se determină şirurile de coeficienţi $A'_{1m}, A'_{2m}, \dots, C'_{2m}$. Problema se reduce la rezolvarea unui sistem infinit de ecuaţii algebrice liniare cu o triplă infinitate de necunoscute, ca în cazul static [5]; analog se poate demonstra regularitatea sistemului.

8. Studiul vibraţiilor proprii pentru stratul elastic, semistratul sau sfertul de strat elastic, sfertul de spaţiu sau optimea de spaţiu elastic, banda sau semibanda elastică şi paralelipipedul elastic poate fi întreprins pe o cale analoagă.

BIBLIOGRAFIE

1. T. Boggio: Sull'integrazione di alcuni equazioni lineari alle derivate parziali, Ann. mat. Pura Appl., Ser. 3, vol. VIII, 1903, p. 181.
2. J. Ignaczak: Direct Determination of Stresses From the Stress Equations of Motion in Elasticity, Archiwum Mech. Stos., t. 11, nr. 5, 1959, p. 671.
3. J. W. Strutt (lord Rayleigh): Proc. London Math. Soc., vol. 17, 1887, p. 4.
4. J. W. Strutt (lord Rayleigh): Scientific Papers, vol. II, p. 441.
5. P. P. Teodorescu: Fonctions de tension dans le problème tridimensionnel de la théorie de l'élasticité, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R., t. 3(51), nr. 4, 1959, p. 499.
6. P. P. Teodorescu: Sur une représentation par potentiels dans le problème tridimensionnel de l'élastodynamique, C. Rend. hebdomadaire des séances de l'Acad. des Sci., Paris, t. 250, nr. 10, 1960, p. 1792.
7. P. P. Teodorescu: Asupra problemei spaţiale a elastodinamicii, St. şi cerc. de mec. apl., vol. XI, nr. 3, 1960, p. 385.
8. P. P. Teodorescu: Asupra unor probleme de elastodinamică plană, An. Univ. Bucureşti, ser. şt. nat., Mat.-Fiz., vol. XII, nr. 39, 1963, p. 21.
9. P. P. Teodorescu: Über das dreidimensionale Problem der Elastokinetik, Z.A.M.M., t. 45, nr. 7, 1965.

О ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Дается формулировка в напряжениях для динамической трёхмерной задачи для однородных, изотропных и линейно упругих тел. В этом случае разрешена задача стационарных вибраций и собственных вибраций для конечных областей в форме параллелепипеда, а также для всех бесконечных областей, получаемых из этого, если одна или несколько из его сторон отброшены на бесконечность (например, полупространство, четверть пространства, восьмая часть пространства, полоса и т. д.).

ON SOME DYNAMICAL PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY

ABSTRACT

A formulation in stresses for the dynamic three-dimensional problem of the homogeneous, isotropic and linear elastic body is given. In this case, the problem of the steady vibrations and the problem of the eigenvibrations for finite regions in the form of a parallelepiped as well as for all the infinite regions which we become from the above mentioned one if one or several of its faces are thrown to infinity (for instance, the halfspace, the quarter of a space, the eighth part of a space, the strip and so on) can be solved.

ASUPRA MIȘCĂRII UNUI PUNCT MATERIAL ÎNTR-UN MEDIU REZISTENT SUB ACȚIUNEA A n FORȚE CENTRALE

G. DINCĂ

1. Mișcarea unui punct material sub acțiunea unui câmp central este o problemă clasică a mecanicii teoretice. Extinderi ale acestei probleme au fost făcute în două direcții admitându-se fie că mișcarea se efectuează într-un mediu rezistent, fie că (neglijând rezistența mediului) masa punctului material este variabilă. Prima dintre direcții este marcată de lucrările lui N. Ciorănescu [1] și V. Vâlcovici [2] iar a doua de o lucrare a lui M. M. Niță [3]. În această lucrare sînt date unele rezultate privind mișcarea unui punct material sub acțiune a n câmpuri centrale, mișcare efectuîndu-se într-un mediu rezistent.

2. Vom presupune că forța de rezistență este opusă vitezei și că este proporțională cu masa punctului,

$$\vec{R} = m \varphi(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \vec{v} \quad (1)$$

φ fiind o funcție negativă de variabilele sale.

Fie $O_i (i = 1, \dots, n)$ centrele celor n câmpuri centrale și $\vec{r}_i$ vectorii lor de poziție față de originea unui sistem rectangular de axe pe care o alegem în O_1 ($\vec{r}_1 = 0$).

Ecuația de mișcare a punctului material se scrie

$$m\ddot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} (\vec{r} - \vec{r}_i) + m\varphi(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \vec{r} \quad (2)$$

unde

$$F_i = \pm |\vec{F}_i| = f_i(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

Punînd

$$k_i = \frac{F_i}{m |\vec{r} - \vec{r}_i|}, \quad k = \sum_{i=1}^n k_i, \quad \vec{k} \cdot \vec{r} = \sum_{i=1}^n k_i \vec{r}_i$$

relația (2) devine

$$\ddot{\vec{r}} = k(\vec{r} - \vec{\rho}) + \dot{\varphi} \vec{r} \quad (3)$$

De aici

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{r} = k\vec{r} \times \vec{\rho} + \dot{\varphi} \vec{r} \times \vec{r}$$

În cazul particular $n = 1$ această ultimă relație se scrie

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{r} = \dot{\varphi} \vec{r} \times \vec{r}$$

sau

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \times \vec{r}) = \dot{\varphi} \vec{r} \times \vec{r}$$

care spune că vectorul $\dot{\vec{r}} \times \vec{r}$ păstrează o direcție fixă și deci mișcarea este plană.

În cazul mai general pe care-l studiem, o condiție necesară și suficientă ca mișcarea să fie plană este

$$(\dot{\vec{r}}, k(\vec{r} - \vec{\rho}), -k\dot{\vec{\rho}}) = 0 \quad (4)$$

unde am însemnat prin $(\dot{\vec{r}}, k(\vec{r} - \vec{\rho}), -k\dot{\vec{\rho}})$ produsul mixt al vectorilor.

În adevăr, necesar și suficient ca o curbă $\vec{r} = \vec{r}(t)$ să fie plană este ca torziunea ei să fie nulă [4], adică

$$(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}) = 0 \quad (5)$$

Ținând seama de (3) și operind transformări ușor vizibile în (5) se obține (4).

Se observă că în condiția (4) funcția φ nu intervine ceea ce demonstrează valabilitatea acestei condiții atât pentru cazul $\varphi = 0$ (rezistența lipsește) cât și pentru medii rezistente de natură destul de generală, pentru care φ este negativă pe unele porțiuni iar pe altele pozitivă sau nulă, cu condiția ca la traversare φ să păstreze toate proprietățile de care avem nevoie în calcule.

Evident condiția (4) este îndeplinită în cazul $n = 1$. Regăsim astfel o teoremă dată mai sus pentru $n = 1$.

Să presupunem condiția (4) îndeplinită.

Fie $\vec{r}_0$ vectorul de poziție al punctului la momentul $t = 0$, $\vec{v}_0$ viteza sa inițială și $\vec{a}_0$ valoarea corespunzătoare a accelerației dată de (3). Fie de asemenea $\vec{n}$ vectorul normalei planului P , determinat de $\vec{v}_0$ și $\vec{a}_0$ (cazul când acești vectori nu determină un plan este lăsat la o parte). Alegînd ca nouă origine un punct situat în planul P , punctul A_0 de vector de poziția $\vec{r}_0$ de exemplu, și însemnînd cu un accent vectorii de poziție față de noua origine vom avea:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}', \quad \vec{r}_i = \vec{r}_0 + \vec{r}'_i, \quad \vec{\rho} = \vec{r}_0 + \vec{\rho}', \quad k\dot{\vec{\rho}} = \sum_{i=1}^n k_i \dot{\vec{r}}'_i$$

În consecință ecuația (3) devine

$$\ddot{\vec{r}}' = k(\vec{r}' - \vec{\rho}') + \varphi \vec{r}' \quad (3')$$

iar condiția (4),

$$(\vec{r}', k(\vec{r}' - \vec{\rho}'), -k\vec{\rho}') = 0 \quad (4')$$

sau

$$k(\vec{r}' - \vec{\rho}') = \alpha \vec{r}' - \beta k \vec{\rho}' \quad (4'')$$

cu care (3') devine

$$\ddot{\vec{r}}' = (\alpha + \varphi) \vec{r}' - \beta k \vec{\rho}' \quad (3'')$$

Dacă vrem ca planul mișcării să fie chiar P , atunci pe lângă condiția (4) vom mai impune condiția

$$\vec{v} \vec{r}' = 0 \quad (6)$$

Din (6) se deduce

$$\vec{v} \vec{r}' = 0 \quad (7)$$

$$\vec{v} \vec{r}' = 0 \quad (8)$$

Ținând seama de (7) și (8) în (3'') se obține

$$\vec{v} \vec{\rho}' = 0 \quad (9)$$

iar din (6), (7) și (4'') se obține

$$\vec{v} \vec{\rho}' = \beta \vec{v} \vec{\rho}' \quad (10)$$

Din (9) și (10) se deduce

$$\vec{v} \vec{\rho}' = 0 \quad (11)$$

care este condiția dată de V. Vâlcovici în [2].

3. Presupunând condiția (4) îndeplinită să alegem în planul mișcării un sistem de coordonate polare r^* , θ luând polul în punctul unde planul mișcării este întâlnit de axa Oz .

Ecuația

$$m \ddot{r}^* = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \vec{R}$$

proiectată pe $\vec{r}^*$ și, pe o axă perpendiculară pe $\vec{r}^*$ al cărei versor îl însemnăm cu $\vec{u}$, dă

$$m(\ddot{r}^* - r^* \dot{\theta}^2) = \left(\sum_{i=1}^n F_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right) \frac{\vec{r}^*}{r^*} + m\varphi(r^*, \theta, \dot{r}^*, \dot{\theta}, t) r^* \quad (12)$$

și respectiv

$$\frac{m}{r^*} \frac{d}{dt} (r^{*2} \dot{\theta}) = \left(\sum_{i=1}^n F_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right) \vec{u} + m\varphi(r^*, \theta, \dot{r}^*, \dot{\theta}, t) (r^{*2} \dot{\theta}) \quad (13)$$

Cum însă

$$\dot{r}^* = (-r^{*2} \dot{\theta}) \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^*} \right), \quad \ddot{r}^* = (r^{*2} \dot{\theta}) \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r^*} \right) - \frac{d}{dt} (r^{*2} \dot{\theta}) \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^*} \right) \quad (14)$$

relațiile (12) și (13) se scriu repsectiv sub forma

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (r^{*2} \dot{\theta}) \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^*} \right) + \left[\frac{1}{r^*} + \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r^*} \right) \right] \frac{(r^{*2} \dot{\theta})^2}{r^{*2}} = \\ & = -\frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^n F_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right) \frac{\vec{r}^*}{r^*} + \varphi(r^*, \theta, \dot{r}^*, \dot{\theta}, t) (r^{*2} \dot{\theta}) \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^*} \right) \end{aligned} \quad (12')$$

$$\frac{d}{dt} (r^{*2} \dot{\theta}) = \frac{r^*}{m} \left(\sum_{i=1}^n F_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right) \vec{u} + \varphi(r^*, \theta, \dot{r}^*, \dot{\theta}, t) (r^{*2} \dot{\theta}) \quad (13')$$

Eliminând funcția φ între (12) și (13) se obține

$$-\frac{m(r^{*2} \dot{\theta})^2}{r^*} \left[\frac{1}{r^*} + \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r^*} \right) \right] = \left(\sum_{i=1}^n F_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right) \left(\frac{\vec{r}^*}{r^*} + \vec{u} r^* \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^*} \right) \right) \quad (15)$$

care constituie o extindere a cunoscutei formule a lui Binet. Formula (13') constituie o generalizare a legii ariilor.

În cazul $n = 1$, (13') devine

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = \varphi(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, t) r^2 \dot{\theta}$$

(căci planul mișcării trecînd acum prin origine, $\vec{r}^* = \vec{r}$) iar dacă $\varphi = 0$ (cazul clasic) avem

$$r^2 \dot{\theta} = c$$

Făcînd în (15) $n = 1$, avem în virtutea celor de mai sus

$$-\frac{m(r^2 \dot{\theta})^2}{r^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \right] = F_1$$

iar dacă $\varphi = 0$,

$$-\frac{mc^2}{r^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \right] = F_1$$

adică tocmai formula lui Binet.

4. În acest paragraf, presupunându-se cunoscut planul mișcării, sînt indicate unele cazuri particulare în care formula lui Binet generalizată permite aflarea traiectoriei.

Să presupunem că atît forțele centrale cît și forța de rezistență nu depind explicit de t , adică

$$F_i = f_i(r^*, \theta, \dot{r}^*, \dot{\theta}), \quad \varphi = \varphi(r^*, \theta, \dot{r}^*, \dot{\theta})$$

Dacă înlocuim în (15) pe $\dot{r}^*$ cu expresia sa din (14) obținem $\ddot{\theta}$ ca funcție de $r^*, \theta, \frac{dr^*}{d\theta}, \frac{d^2r^*}{d\theta^2}$, atunci înlocuind în (13) pe $\ddot{\theta}, \dot{r}^*$ cu expresiile lor în funcție de $r^*, \theta, \frac{dr^*}{d\theta}, \frac{d^2r^*}{d\theta^2}$, se obține ecuația traiectoriei *.

În cazul în care forțele centrale depind numai de punct, funcția φ putînd să depindă și de viteză și de timp, ecuația diferențială a traiectoriei poate fi obținută în coordonate carteziene. Dacă $z = \psi(x, y)$ este ecuația planului mișcării din (3) avem

$$\ddot{x} = \sum_{i=1}^n k_i(x, y, \psi(x, y)) (x - x_i) + \varphi\left(x, y, \psi(x, y), \dot{x}, \dot{y}, \frac{d}{dt} \psi(x, y), t\right) \dot{x} \quad (16)$$

$$\ddot{y} = \sum_{i=1}^n k_i(x, y, \psi(x, y)) (y - y_i) + \varphi\left(x, y, \psi(x, y), \dot{x}, \dot{y}, \frac{d}{dt} \psi(x, y), t\right) \dot{y}$$

Ne încadrăm în cazul mai general de mișcare plană de ecuații

$$\ddot{x} = X(x, y) + \varphi(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) \dot{x}$$

$$\ddot{y} = Y(x, y) + \varphi(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) \dot{y}$$

Se arată [5] că pentru o asemenea mișcare ecuația diferențială a traiectoriei este

$$\left(\frac{Y - Xy'}{y''}\right)'' = 2X(x, y) + 2\varphi\left[x, y, \left(\frac{Y - Xy'}{y''}\right)^{1/2}, y' \left(\frac{Y - Xy'}{y''}\right)^{1/2}, t\right] \left(\frac{Y - Xy'}{y''}\right)^{1/2} \quad (17)$$

unde accentul înseamnă derivare față de x .

Se arată de asemenea că dacă condițiile inițiale în care trebuie integrat sistemul (16) sînt

$$t = t_0; \quad x = x_0, \quad y = y_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0$$

* Faptul că $\vec{u}$ este un vector normal pe $\frac{\vec{r}^*}{r^*}$ și situat în același plan presupus dat, permite să privim pe $\vec{u}$ ca funcție de $\frac{\vec{r}^*}{r^*}$.

atunci integrăm (17) în condițiile

$$x = x_0; \quad y = y_0, \quad y' = \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}, \quad y'' = \frac{\ddot{x}_0 Y(x_0, y_0) - \dot{y}_0 X(x_0, y_0)}{\dot{x}_0^3}$$

Pentru a ofine cazul nostru nu avem decît să punem

$$X(x, y) = \sum_{i=1}^n k_i(x, y) (x - x_i) \quad Y(x, y) = \sum_{i=1}^n k_i(x, y) (y - y_i)$$

în (17) și în ultimele condiții inițiale.

5. În încheiere să dăm un exemplu în care condiția (4) este îndeplinită și deci generalizările de mai sus își pot găsi aplicații.

Fie $k_i(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = h(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) c_i$, c_i constante. Atunci $\vec{c}$ este un vector constant iar condiția (4) este, evident, verificată.

Pentru $h(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$ constantă obținem cazul a n forțe elastice.

BIBLIOGRAFIE

1. Nicolas Ciorănescu: Le mouvement d'un point matériel dans un milieu résistant sous l'action d'une force centrale, Bulletin de l'Académie Roumaine, T. XXIII, 3, 1940.
2. Victor Vâlcovici: Sur certaines mouvements ayant des trajectoires planes, Bulletin de l'Académie Roumaine, T. XXIII, 9, 1941.
3. M. M. Niță: Asupra mișcării rachetei într-un câmp de forțe centrale, Studii și cercetări de mecanică aplicată, 6, 1960.
4. Andrei Dobrescu: Geometrie diferențială, Editura didactică și pedagogică, București, 1963, p. 170.
5. Nicolas Ciorănescu: Sur les mouvements balistiques, Bulletin de l'Académie Roumaine, T. XXII, 10, 1940.

ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ n ЦЕНТРАЛЬНЫХ СИЛ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Изучается движение материальной точки в сопротивляющейся среде (1) под действием n центральных сил. Когда условие (4) удовлетворено, дается обобщение формулы Бинэ (15) и закона площадей (13').

SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL DANS UN MILIEU RÉSISTANT SOUS L'ACTION DE n FORCES CENTRALES

RÉSUMÉ

On étudie le mouvement d'un point matériel dans un milieu résistant (1) sous l'action de n forces centrales. Quand la condition (4) est satisfaite on donne une généralisation de la formule de Binet (15) et de la loi des aires (13').

ASUPRA REPARTIȚIEI OPTIMULUI ÎN PROGRAMAREA LINIARĂ STOCASTICĂ*

B. BEREANU

INTRODUCERE

În această lucrare se dau unele rezultate cu privire la natura repartiției optimului unui program liniar stocastic. G. Tintner în [1] a pus pentru prima dată problema determinării funcției de repartiție a optimului unui program liniar când coeficienții care intervin sînt variabile aleatoare a căror repartiție mixtă este cunoscută **. G. Mihoc a descris [3] un mod de a rezolva această problemă. În [5], [6], [7] dezvoltînd considerațiile din [3] s-a dat o metodă de determinare efectivă a valorilor funcției de repartiție a optimului. În [8], [9] s-a studiat cazul important în aplicații al problemei stocastice a transportului, iar în [10] s-a discutat posibilitatea aplicării rezultatelor în planificare. Alte aplicații posibile, ale funcției de repartiție a optimului unui program liniar sînt date în [2]. O interesantă legătură a fost stabilită de curînd [11] între această problemă și metoda drumului critic.

După cunoștințele autorului, nu s-au publicat încă rezultate asupra naturii funcției de repartiție a optimului, în ipoteza că variabilele care intervin urmează anumite repartiții uzuale. Obiectul acestei lucrări este de a da asemenea rezultate în cazul programelor liniare stocastice considerate în [6]. În acest scop se dă și un mod de abordare a problemei funcției de repartiție diferit de cel din lucrările citate, bazat pe utilizarea transformatei Laplace. Demonstrațiile complete vor apare în [12]. Un rol important în cele ce urmează îl joacă regiunile de decizie și probabilitățile fundamentale ale unui program liniar stocastic introduse în [6], [7].

§ 1. Definiții și notații. Programe liniare de tip Erlang

Fie $t = (t_1, \dots, t_r)$ un vector aleator. Vom presupune că există densitatea de repartiție $\varphi(t_1, \dots, t_r)$, sau mai scurt $\varphi(t)$. În aplicații de obicei $\varphi(t) > 0$, dacă $t \in T$ și $\varphi(t) = 0$, dacă $t \notin T$. T este un interval din R^r care poate coincide cu întreg spațiul.

* Această comunicare a fost prezentată la sesiunea științifică jubiliară a Universității din București, 15–17 octombrie 1964. Demonstrațiile sînt date în [12].

** În [2] acest punct de vedere se numește „pasiv“, iar în [4] cel al „expectativei („wait ans see“).

Considerăm următoarele programe liniare

$$(I) \begin{cases} \min_x c'(t)x \quad (x \in X) \\ X = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\} \end{cases} \quad (II) \begin{cases} \min_x c'x \quad (x \in X_t) \\ X_t = \{x \mid Ax = b(t), x \geq 0\} \end{cases}$$

În (I, II), A este o matrice $m \times n$ ($m < n$) de rang m , x, o, c , sînt vectori $n \times 1$, b este $m \times 1$, accentul indică transpunerea, iar funcțiile vectoriale $c(t)$ și $b(t)$ sînt date de:

$$(I) \quad c(t) = c_0 + c_1 t_1 + \dots + c_r t_r, \quad b(t) = b_0 + b_1 t_1 + \dots + b_r t_r$$

unde c_i și b_i ($0 \leq i \leq r$) sînt vectori coloană $n \times 1$, respectiv $m \times 1$.

Asupra mulțimilor X și X_t facem următoarele ipoteze:

I_a) X este nevidă și mărginită.

I_b) Soluțiile fundamentale ale programului (I) sînt nedegenerate.

II_a) X_t este nevidă pentru orice $t \in T$ și există cel puțin un $t^* \in T$ astfel ca mulțimea X_{t^*} să fie mărginită.

III_b) Soluțiile fundamentale ale programului dual programului (II) după introducerea variabilelor abateri sînt nedegenerate.

Observație. Condiția II_a este îndeplinită în multe probleme practice. De exemplu în probleme în care restricțiile sînt de forma $Ax \leq b(t)$, $x \geq 0$ și componentele vectorului $b(t)$ sînt nenegative. Cazul în care există $t \in T$ astfel ca $X_t = \emptyset$ (mulțimea vidă) a fost considerat în [6], și nu ne vom ocupa de el. Nedegenerarea soluțiilor fundamentale se poate obține printr-una din metodele de perturbare uzuale.

O repartiție se numește de *tip Erlang* dacă densitatea sa este $\frac{\lambda(\lambda x)^{a-1}e^{-\lambda x}}{(a-1)!}$ unde a este un întreg pozitiv. Transformata Laplace a acestei densități de repartiție este $\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^a$.

Repartiția unei variabile aleatoare nenegative și absolut continuă se va numi *repartiție Erlang generalizată* [13], dacă transformata Laplace a densității sale este o funcție rațională. Un caz particular important în aplicații este cel al repartiției exponențiale. După cum se observă în [13] multe repartiții pot fi simulate cu ajutorul repartițiilor Erlang generalizate. Vom spune că un program liniar de tipul I sau II este un *program Erlang* dacă $t_1, \dots, t_r$ sînt variabile aleatoare independente nenegative ale căror repartiții aparțin familiei repartițiilor Erlang generalizate și în plus $c_0 = b_0 = 0$ iar $c_i \geq 0$ (respectiv $b_i \geq 0$) ($1 \leq i \leq r$).

2. Transformata Laplace a densității de repartiție a unui program liniar stocastic și unele aplicații

Vom utiliza următoarea

Lemă. Fie $l_i(x_1, x_2, \dots, x_r)$ ($1 \leq i \leq q$) funcții măsurabile Borel în R^r cu valori în R , mărginite, exceptînd eventual pe o mulțime de măsură nulă în

raport cu repartiția de probabilitate a vectorului aleator t și

$$l(t_1, \dots, t_r) = l_i(t_1, \dots, t_r) \quad (t \in S_i, 1 \leq i \leq q),$$

unde S_i sînt mulțimi boreliene din R^r care satisfac

- a) $\bigcup_{i=1}^q S_i = R^r$
- b) $P(S_i) = p_i > 0$
- c) $P(S_i \cap S_j) = 0 \quad (i \neq j)$

($P(\cdot)$ este funcția de probabilitate).

Dacă $F_i(x)$ sînt funcțiile de repartiție ale variabilelor aleatoare $l_i(t_1, \dots, t_r)$, atunci funcția de repartiție $F(x)$ a variabilei aleatoare $l(t_1, \dots, t_r)$ este dată de

$$(1) \quad F(x) = \sum_{i=1}^q p_i F_i(x).$$

Această leamă se demonstrează ușor observînd că $l(x_1, \dots, x_r)$ este o funcție măsurabilă Borel, mărginită și univocă, exceptînd eventual o mulțime de măsură nulă.

Observație. Dacă $l_i(t_1, \dots, t_r)$ ($1 \leq i \leq q$) sînt variabile aleatoare absolut continue, atunci $l(t_1, \dots, t_r)$ este o variabilă aleatoare absolut continuă și o relație asemănătoare există între densitățile de repartiție corespunzătoare.

Fie acum

$$(2) \quad \gamma_j(t_1, \dots, t_r) = \alpha_{0j} + \alpha_{1j}t_1 + \dots + \alpha_{rj}t_r \quad (t \in S_j, 1 \leq j \leq q)$$

optimele parțiale ale programului liniar I(II) corespunzătoare regiunilor de decizie S_j , iar p_j probabilitățile fundamentale atașate. Optimul programului liniar I(II) este deci, variabila aleatoare determinată de

$$(3) \quad \gamma(t_1, \dots, t_r) = \gamma_j(t_1, \dots, t_r) \quad (t \in S_j, 1 \leq j \leq q),$$

unde S_j îndeplinesc condițiile a), b), c) ale lemei. Notăm cu $\varphi_i^*(s)$ ($1 \leq i \leq r$) transformata Laplace * a densității de repartiție $\varphi_i(x)$ a variabilei aleatoare t_i iar cu $\varphi_r^*(s)$ și $F_r^*(s)$ transformata Laplace a densității de repartiție, respectiv a funcției de repartiție a optimului $\gamma(t_1, \dots, t_r)$.

Avem

Teorema 1. Dacă t_i ($1 \leq i \leq r$) sînt variabile aleatoare nenegative și independente iar $c_i \geq 0$, transformata Laplace a densității de repartiție a programului liniar (I), (II) este dată de

$$(4) \quad \varphi_r^*(s) = \sum_{i=1}^q p_i e^{-\alpha_{0i}s} \prod_{l=1}^r \varphi_l^*(\alpha_{li}s).$$

* În cele ce urmează transformata Laplace a funcției $\varphi(x)$ este definită prin

$$\varphi^*(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \varphi(x) dx.$$

Această teoremă se stabilește utilizând lema de mai sus și proprietățile transformatei Laplace a densității de repartiție a unei sume de variabile aleatoare independente [14].

Observație. Din proprietățile transformatei Laplace [14] rezultă imediat:

$$(5) \quad F_r^*(s) = \frac{1}{s} \left(\sum_{i=1}^q p_i e^{-\alpha_{0i}s} \prod_{l=1}^r \varphi_i^*(\alpha_{li}s) \right).$$

Formulele (4) și (5) ne permit să calculăm densitatea de repartiție și funcția de repartiție a optimului unui program liniar stocastic de tipul (I) sau (II) dacă cunoaștem densitățile de repartiție ale variabilelor aleatoare care intervin și aceste variabile aleatoare sînt independente.

Teorema 2. *Repartiția optimului unui program liniar stocastic de tip Erlang este o repartiție de tip Erlang generalizată.*

Demonstrația se face observînd că din definiția programului liniar stocastic de tip Erlang și din $\alpha_{0i} = 0$ ($1 \leq i \leq q$) rezultă că $\varphi_i^*(s)$ este o funcție rațională de s . Acest rezultat prezintă un deosebit interes practic. Într-adevăr în multe probleme practice variabilele aleatoare care intervin pot fi approximate prin repartiții de tip Erlang sau combinații ale acestora. De exemplu, după cum se observă în [13] se poate alege $\theta \in [0, 1]$ și $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ astfel ca densitatea de repartiție $\theta \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + (1 - \theta) \lambda_2 e^{-\lambda_2 x}$ să corespundă unei repartiții cu valoarea medie arbitrar aleasă și coeficient de variabilitate oricare cuprins între 1 și $+\infty$. Însă transformata Laplace a acestei densități de repartiție este o funcție rațională și deci densitatea aparține familiei densităților de repartiție de tip Erlang generalizate.

§ 3. Problema stocastică a transportului și aplicații la aprovizionarea cu piese de schimb

Vom considera problema stocastică a transportului introdusă în [9]. Fie

$$(6) \quad \gamma(t) = \min_{\{x_{ij}\}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij} x_{ij},$$

minimumul fiind luat pe mulțimea soluțiilor sistemului

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} &= a_i \quad (1 \leq i \leq m) \\ (7) \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j + t_j \quad (1 \leq j \leq n) \\ \sum_{i=1}^m x_{i,n+1} &= \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n (b_j + t_j) \\ x_{ij} &\geq 0 \quad (1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n+1). \end{aligned}$$

În (6), (7), $c_{ij} \geq 0$ ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$), $c_{i,n+1} = 0$, t_j ($1 \leq j \leq n$) sînt variabile aleatoare nenegative, iar a_i , b_j sînt numere nenegative care satisfac

$$(8)' \quad \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n (b_j + t_j) \geq 0.$$

Interpretarea economică a acestui model este următoarea: în m centre i se poate produce, în cantități maxime a_i , un produs omogen cerut în n centre j în cantități $b_j + t_j$, unde t_j sînt variabile aleatoare a căror densitate mixtă de probabilitate este dată. Capacitatea maximă totală de producție fiind cel puțin egală cu cererea maximă posibilă, să se determine funcția de repartiție a cheltuielilor minime, cunoscîndu-se cheltuielile unitare de producție și transport.

Să considerăm cazul cînd produsul omogen este constituit, din piese de același tip utilizate fie ca piese de schimb pentru utilaje în funcțiune (consumurile aleatoare t_j), fie pentru producerea unor noi utilaje (consumurile nealeatoare b_j). În anumite condiții [15] consumurile de piese de schimb ale diferitelor centre pot fi aproximativ prin variabile aleatoare independente cu legi de repartiție exponențiale.

Fie deci $\varphi_j(x) = \begin{cases} \lambda_j e^{-\lambda_j x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ ($1 \leq j \leq n$), densitățile de repartiție ale variabilelor aleatoare t_j .

Vom presupune că λ_j , a_i , b_j sînt astfel încît (7) are loc practic sigur. În acest caz utilizînd (5) și făcînd calculele se obține funcția de repartiție a cheltuielilor totale minime:

$$(9) \quad F_{\gamma}(x) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^n A_{ij} (1 - e^{-\lambda_{ij}(x - \alpha_{0i})}).$$

În (9) semnul ' arată că însumarea se face numai pentru acei i pentru care $x > \alpha_{0i}$ unde α_{0i} are semnificația din (5). Se poate arăta că numerele A_{ij} satisfac relația

$$\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^n A_{ij} = 1,$$

care poate fi utilizată pentru verificarea calculelor.

4. Cazul micilor variații aleatoare.

În practică se întîlnește frecvent cazul: $\varphi_i(x) > 0$, dacă $x \in [\delta_i, \delta'_i]$ și $\varphi_i(x) = 0$, dacă $x \notin [\delta_i, \delta'_i]$ ($1 \leq i \leq r$). Fie $\mu = \max_i (\delta'_i - \delta_i)$ și ε_i o variabilă cu două valori: δ_i , δ'_i . Cele 2^r vîrfuri ale intervalului Δ sînt deci punctele $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$. Notăm

$$(10) \quad \Sigma_1(u) = c'_2(u) - c'_1(u) B^{-1} A_1, \quad \Sigma_{II}(u) = \tilde{B}^{-1} b(t).$$

În (10), B respectiv $\tilde{B}$ este o bază optimizantă a programului linear (I), respectiv (II) pentru $t \in T$, iar $(c_1(u), c_2(u))$ este partiția în blocuri a vectorului

$c(u)$ corespunzătoare în (I) partiției în blocuri (B, A_1) a matricei A . Dacă μ este suficient de mic, programele liniare considerate au o singură regiune de decizie. În acest caz în (3) $q = 1$ și deci

$$(11) \gamma(t_1, \dots, t_r) = \alpha_0 + \alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_r t_r.$$

Pentru a calcula efectiv $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ se poate proceda în modul următor: se determină baza optimizantă, rezolvînd problema de programare liniară ordinară corespunzătoare unei realizări posibile a vectorului aleator t . Fie aceasta B în cazul programului (I) și $c_B(t)$, vectorul coeficienților funcției obiectiv asociați coloanelor din baza B . Avem

$$(12) \gamma(t_1, \dots, t_r) = c(t) B^{-1}b,$$

de unde se obțin $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$.

Analog se procedează în cazul programului linear (II).

Din (11) se poate determina funcția de repartiție a variabilei aleatoare $\gamma(t_1, \dots, t_r)$ utilizînd densitatea de repartiție a vectorului aleator t . În condițiile teoremei 1, transformata Laplace a acestei funcții de repartiție se obține din (5), făcînd $q = 1$ și observînd că în acest caz $p_1 = 1$.

Prezintă deci interes a se da o condiție necesară și suficientă ca un program linear stocastic de tipul I (respectiv II) să admită o singură regiune de decizie. Avem

Teorema 3. *O condiție necesară și suficientă ca programul linear (I) să aibe o singură regiunea de decizie este ca să aibe loc inegalitățile:*

$$(13) \Sigma_I(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \geq 0.$$

Într-adevăr s-a arătat în [6], [7] că regiunea de decizie corespunzătoare bazei B în cazul (I) este dată de $\{t \mid c'_2(t) - c'_1(t)B^{-1}A_1 \geq 0, t \in T\}$. Dar dacă (13) are loc, această regiune de decizie coincide cu Δ . Necesitatea este evidentă.

Observație. Pentru programul linear (II) condiția necesară și suficientă corespunzătoare este $\Sigma_{II}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \geq 0$.

BIBLIOGRAFIE

1. Tintner, G.: Stochastic linear programming with applications to agricultural economics, Second Symposium on Linear Programming, Washington, National Bureau of Standards, 1955 (citat în 2).
2. Sengupta, J. K., Tintner, G., Millham C.: On some theorems of stochastic linear programming with applications, Management Science, 10 (1963), 1, pp. 143—159.
3. Mihoc, G.: Unele precizări în legătură cu aplicarea programării liniare, Revista de statistică, 12, 1959, p. 13—18.
4. Madansky, A.: Methods of solution of linear programs under uncertainty, Oper. Res., 10, 4, 1962, p. 463—471.
5. Bereanu B.: On stochastic linear programming. I Distribution problems: a single random variable, Rev. Math. Pures et appl. VIII, 4 (1963), pp. 683 — 697.
6. — Régions de decision et répartition de l'optimum dans la programmation linéaire, C.R. Acad. des Sci. Paris, t. 259, 7, 1964, p. 1393—1396.
7. — On stochastic linear programming. II Distribution problems: Nonstochastic technological matrix (va apare).
8. — Problema stocastică a transportului I. Costuri aleatoare, Com., Acad. R.P.R., XIII, 4 (1963), p. 325—331.

9. — Problema stocastica a transportului II. Consumuri aleatoare, Com., Acad. R.P.R., XIII, 4 (1963), p. 333—337.
10. — Unele aplicații ale programării stocastice în planificare, Lucrările consfătuirii științifice de statistică 1962, p. 95—107, Direcția Centrală de Statistică, București 1963.
11. Charnes, A., Cooper W. W., Thompson, G. L.: Critical path analyses via chance constrained and stochastic programming. *Operations Research*, 12 (1964), 3, pp. 460—470.
12. Bereanu B.: On stochastic linear programming. IV. The Laplace transform of the distribution of the optimum and applications (va apare).
13. Cox, D.R.: *Renewal theory*, Methuen and Co. London, 1962.
14. Van der Pol, B.: and Bremmer, H., *Operational Calculus*, Cambridge University Press, 1955.
15. Beckmann, M., Muth T.: „On the two-bin inventory policy: an application of the Arrow-Harris-Marshak model“. „In *Studies in the mathematical theory of inventory and production*“, Stanford University Press, Stanford, 1958.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ОПТИМУМА В СТОХАСТИЧЕСКОМ ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Цель статьи — найти распределение оптимума в задаче линейного программирования, если коэффициенты функции критерия или правые части, линейные функции от независимых случайных величин с некоторыми обычно встречающимися распределениями. Находится (см. (4)) преобразование Лапласа плотности распределения вероятностей оптимума и это преобразование используется для того, чтобы получить, что если случайные величины имеют обобщенные распределения типа Эрланга (которые часто могут использоваться для симулирования встречающихся на практике распределений), то распределение оптимума является такого же типа.

Тот же метод используется для того, чтобы получить функцию распределения минимума полных затрат в стохастической транспортной задаче, рассмотренной в предыдущей статье [9], в том случае, когда случайные потребления разных центров независимы и имеют экспоненциальные распределения.

Рассматривается случай малых случайных вариаций, а также устанавливаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы оптимум был линейной функцией соответствующих случайных переменных. Полные доказательства даны в [12].

ON THE DISTRIBUTION OF THE OPTIMUM IN STOCHASTIC LINEAR PROGRAMMING

ABSTRACT

The purpose of this paper is to find the distribution of the optimum of a linear programming problem when its cost coefficients, or the right-hand side are linear functions of independent random variables with certain usual distributions. The Laplace transform of the probability density of the optimum is obtained (4) and used to prove that if the random variables have generalized Erlang distributions which can often be used to simulate distributions met with in practice, then the distribution of the optimum is of the same type.

The same method is used to obtain the cumulative distribution function of the minimum total costs of the stochastic transportation problem introduced in a previous paper [9] when the random consumptions of various centres are independent and have exponential distributions.

The case of small random variations is investigated and a necessary and sufficient condition that the optimum be a linear function of the random variables involved is given. Complete proofs are given in [12].

[Illegible text block containing several paragraphs of medical or scientific discussion.]

[Illegible text block containing several paragraphs of medical or scientific discussion.]

[Illegible text block containing several paragraphs of medical or scientific discussion.]

REPREZENTAREA LUI GALERKIN ȘI CONDIȚIILE LUI BELTRAMI-MITCHELL ÎN TEORIA CUPLATĂ A TERMOELASTICITĂȚII LINEARE

E. SOÓS

Ecuațiile fundamentale ale termoelasticității lineare sînt [1,2]:

$$\text{Div } \sigma + \vec{F} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (\text{ecuația de mișcare}) \quad (1)$$

$$k \Delta T - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \kappa^{-1} T_0 \nabla \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + Q = 0, \quad (\text{ecuația energetică}) \quad (2)$$

$$\sigma = \lambda (\nabla \cdot \vec{u}) E_3 + \mu \left(\frac{d\vec{u}}{dr} + \text{grad } \vec{u} \right) - \alpha \kappa^{-1} T E_3, \quad (\text{ecuația constitutivă}) \quad (3)$$

Din (1) și (3) obținem:

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) - \alpha \kappa^{-1} \nabla T + \vec{F} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (4)$$

În aceste relații am utilizat următoarele notații:

σ — tensorul tensiune, $\vec{u}$ — vectorul deplasare, T — temperatura absolută, T_0 — temperatura uniformă a corpului la momentul inițial, $T = T - T_0$, $\vec{F}$ — forța masică, Q — intensitatea surselor termice din corp, ρ — densitatea constantă a materialului, λ și μ — constantele izoterme ale lui Lamé, $\nu = 2^{-1} \lambda (\lambda + \mu)^{-1}$ — coeficientul izoterm al lui Poisson $\chi = 3(3\lambda + 2\mu)^{-1}$ — coeficientul izoterm de compresibilitate, α — coeficientul de dilatare, k — coeficientul de conductibilitate termică, c — căldura specifică la deformare constantă, E_3 — matricea unitate de ordinul trei, ∇ — operatorul lui Hamilton, Δ — operatorul lui Laplace, $\vec{r}$ — vectorul de poziție al punctului, t — timpul.

Utilizăm un sistem de coordonate cartezian ortogonal $Ox_1x_2x_3$.

*

Vom da o reprezentare de tip Galerkin pentru soluția sistemului (2) și (4) utilizînd metoda matricilor asociate [3].

Notăm:

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad Y = \frac{\partial}{\partial t}, \quad P^* = \mu P - \rho Y^2, \quad P = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2.$$

Fie L matricea asociată sistemului de ecuații cu derivate parțiale (2), (4). Vom avea:

$$L = \begin{pmatrix} P^* + (\lambda + \mu)X_1^2 & (\lambda + \mu)X_1X_2 & (\lambda + \mu)X_1X_3 & -\alpha\kappa^{-1}X_1 \\ (\lambda + \mu)X_2X_1 & P^* + (\lambda + \mu)X_2^2 & (\lambda + \mu)X_2X_3 & -\alpha\kappa^{-1}X_2 \\ (\lambda + \mu)X_3X_1 & (\lambda + \mu)X_3X_2 & P^* + (\lambda + \mu)X_3^2 & -\alpha\kappa^{-1}X_3 \\ -\alpha\kappa^{-1}T_0YX_1 & -\alpha\kappa^{-1}T_0YX_2 & -\alpha\kappa^{-1}T_0YX_3 & kP - \rho cY \end{pmatrix} \quad (5)$$

Dacă introducem notațiile:

$$u_i = \varphi_i (i = 1, 2, 3), \quad T = \varphi_4, \quad -F_i = \psi_i (i = 1, 2, 3), \quad Q = \psi_4,$$

unde u_i și F_i sînt componentele lui $\vec{u}$ respectiv $\vec{F}$, este evident că sistemul (2), (4) este echivalent cu următoarea ecuație matricială:

$$L \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Să considerăm acum matricea

$$M = \begin{pmatrix} P^* [P^*(kP - \rho cY) + PS - SX_1^2] & -P^*SX_1X_2 \\ -P^*SX_2X_1 & P^* [P^*(kP - \rho cY) + PS - SX_2^2] \\ -P^*SX_3X_1 & -P^*SX_3X_2 \\ \alpha\kappa^{-1}T_0P^*YX_1 & \alpha\kappa^{-1}T_0P^*YX_2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -P^*SX_1X_3 & \alpha\kappa^{-1}P^{*2}X_1 \\ -P^*SX_2X_3 & \alpha\kappa^{-1}P^{*2}X_2 \\ P^* [P^*(kP - \rho cY) + PS - SX_3^2] & \alpha\kappa^{-1}P^{*2}X_3 \\ \alpha\kappa^{-1}T_0P^*YX_3 & P^*[(\lambda + 2\mu)P - \rho Y^2] \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$S = (\lambda + \mu)(kP - \rho cY).$$

Din (5) și (6) rezultă:

$$L.M = M.L = P^{*2} [P^*(kP - \rho cY) + PS] E_4 \quad (8)$$

În relația (8) E_4 este matricea unitate de ordinul patru. Să luăm acum:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} \Gamma_1^* \\ \Gamma_2^* \\ \Gamma_3^* \\ \Gamma_4^* \end{pmatrix} \quad (9)$$

Dacă considerăm vectorul $\vec{\Gamma}$, cu componentele $\Gamma_i = \rho c P^* \Gamma_i^*$ ($i = 1, 2, 3$) și scalarul $G = (\lambda + 2\mu) P^{2*} \Gamma_4^*$, obținem imediat din relațiile (7) și (9):

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = (\lambda + 2\mu) \left[\square_1 \varpi_1 - \varepsilon \Delta \frac{\partial}{\partial t} \right] \vec{\Gamma} - (\lambda + \mu) \varpi_2 \nabla (\nabla \cdot \vec{\Gamma}) + \alpha x^{-1} (\lambda + 2\mu)^{-1} \nabla G \quad (10)$$

$$T(\vec{r}, t) = \alpha \mu T_0 x^{-1} \rho^{-1} c^{-1} \square_2 \left(\nabla \cdot \frac{\partial \vec{\Gamma}}{\partial t} \right) + \square_1 G \quad (11)$$

unde am utilizat notațiile:

$$\square_1 = \Delta - \frac{1}{V_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \square_2 = \Delta - \frac{1}{V_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad V_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad V_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad (12)$$

$$\varpi_1 = \frac{k}{\rho c} \Delta - \frac{\partial}{\partial t}, \quad \varpi_2 = \varpi_1 - 2(1 - \nu) \varepsilon \frac{\partial}{\partial t},$$

iar ε este constanta de cuplare:

$$\varepsilon = \frac{\alpha^2 T_0}{x^2 \rho^2 c V_1^2} \quad (13)$$

Din (6), (8), și (9) rezultă că vectorul și scalarul Galerkin $\vec{\Gamma}(\vec{r}, t)$ respectiv $G(\vec{r}, t)$ trebuie să satisfacă ecuațiile următoare:

$$\square_2 \left[\square_1 \varpi_1 - \varepsilon \Delta \frac{\partial}{\partial t} \right] \vec{\Gamma} = - \frac{\vec{F}}{\mu(\lambda + 2\mu)} \quad (14)$$

$$\left[\square_1 \varpi_1 - \varepsilon \Delta \frac{\partial}{\partial t} \right] G = - \frac{Q}{\rho c} \quad (15)$$

Această reprezentare prin potențiali legați în cazul cuazi-static a fost obținută în 1950 de V. Ionescu Cazimir [4].

Dacă neglijăm efectul termic regăsim reprezentare dată de M. Iacovache [5].

În cazul în care forțele masice sînt neglijabile și nu avem surse termice în corp, din (10), (11), (14) și (15) rezultă că $\vec{u}$ și T satisfac ecuațiile:

$$\square_2 \left[\square_1 \varpi_1 - \varepsilon \Delta \frac{\partial}{\partial t} \right] \vec{u} = 0, \quad \left[\square_1 \varpi_1 - \varepsilon \Delta \frac{\partial}{\partial t} \right] T = 0 \quad (16)$$

Aceste ecuații consecință au fost obținute în 1952 de M. Cristea [6].

În 1964, W. Nowacki în lucrarea [7], a obținut o reprezentare analoagă cu cea dată de noi.

Dacă câmpul forțelor masice este irotational avem:

$$\vec{F} = \nabla \Pi_0,$$

Luînd în acest caz $\mu \square_2 \vec{\Gamma} = \nabla \Lambda_0$, din (10), (11) și (14) obținem imediat:

$$\vec{U}_F(\vec{r}, t) = \nabla (\varpi_1 \Lambda_0), \quad T_F(\vec{r}, t) = \alpha T_0 x^{-1} \rho^{-1} c^{-1} \Delta \frac{\partial \Lambda_0}{\partial t} \quad (17)$$

și

$$\left[\square_1 \square_1 - \varepsilon \Delta \frac{\partial}{\partial t} \right] \Lambda_0 = - \frac{\Pi_0}{\lambda + 2\mu}. \quad (18)$$

Din (17) se vede că un câmp irotational de forțe masice produce într-un corp termoelastice nemărginit numai unde elastice irotationale.

*

Dacă câmpul forțelor masice este solenoidal avem:

$$\vec{F} = \nabla \times \vec{\Pi}.$$

Considerind în acest caz $(\lambda + 2\mu) \left[\square_1 \square_1 - \varepsilon \Delta \frac{\partial}{\partial t} \right] \vec{F} = \Delta \times \vec{\Lambda}$, din (10), (11) și (14) găsim:

$$\vec{U}_F(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{\Lambda}, \quad T_F(\vec{r}_1, t) = 0 \quad (19)$$

și

$$\square_2 \vec{\Lambda} = - \frac{\vec{\Pi}}{\mu} \quad (20)$$

Relațiile (19) arată că un câmp solenoidal de forțe masice nu modifică, într-un corp termoelastice nemărginit, starea de temperatură și produce în corp numai unde rotaționale, care se propagă cu o viteză independentă de proprietățile termice ale corpului.

Menționăm că relațiile (17)–(20) se pot obține și cu ajutorul metodei lui Helmholtz [8].

*

Pentru a obține ecuațiile de compatibilitate Beltrami-Mitchell trebuie să eliminăm din relațiile (1), (2) și (3) vectorul $\vec{u}$. În acest scop să introducem matricile:

$$L = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & 0 & X_2 & 0 & X_3 & 0 \\ 0 & X_2 & 0 & X_1 & X_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_3 & 0 & X_2 & X_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha\kappa^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha\kappa^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha\kappa^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} \rho Y^2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho Y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho Y^2 \\ (\lambda + 2\mu)X_1 & \lambda X_2 & \lambda X_3 \\ \lambda X_1 & (\lambda + 2\mu)X_2 & \lambda X_3 \\ \lambda X_1 & \lambda X_2 & (\lambda + 2\mu)X_3 \\ \mu X_2 & \mu X_1 & 0 \\ 0 & \mu X_3 & \mu X_2 \\ \mu X_3 & 0 & \mu X_1 \\ \alpha T_0 \kappa^{-1} Y X_1 & \alpha T_0 \kappa^{-1} Y X_2 & \alpha T_0 \kappa^{-1} Y X_3 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} -F_1 \\ -F_2 \\ -F_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -Q \end{pmatrix} \quad (21)$$

unde :

$$R = kP - \rho c Y.$$

Cu ajutorul matricilor (21) ecuațiile (1), (2) și (3) pot fi scrise în următoarea formă :

$$L \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ T \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + N \quad (22)$$

Pentru a găsi consecințele diferențiale ale sistemului (1), (2), (3), care să nu conțină componentele vectorului $\vec{u}$, trebuie să determinăm [3] o matrice $U = (u_{ij})$, care să satisfacă identic relația :

$$U \cdot M = 0 \quad (23)$$

În acest caz din (22) vom obține următoarea relație matricială :

$$V \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ T \end{pmatrix} = U \cdot N, \quad \text{unde } V = (v_{ij}) = U \cdot L \quad (24)$$

Din condiția (23) rezultă că trebuie să găsim soluțiile următorului sistem, cu coeficienți și necunoscute polinoame:

$$\begin{aligned}
 & \rho Y^2 u_{i1} + (\lambda + 2\mu) X_1 u_{i4} + \lambda X_1 u_{i5} + \lambda X_1 u_{i6} + \mu X_2 u_{i7} + \mu X_3 u_{i9} + \\
 & \quad + \alpha T_0 \kappa^{-1} Y X_1 u_{i,10} = 0 \\
 & \rho Y u_{i2} + \lambda X_2 u_{i4} + (\lambda + 2\mu) X_2 u_{i5} + \lambda X_2 u_{i6} + \mu X_1 u_{i7} + \mu X_3 u_{i8} + \\
 & \quad + \alpha T \kappa^{-1} Y X_2 u_{i,10} = 0 \\
 & \rho Y^2 u_{i3} + \lambda X_3 u_{i4} + \lambda X_3 u_{i5} + (\lambda + 2\mu) X_3 u_{i6} + \mu X_2 u_{i8} + \mu X_1 u_{i9} + \\
 & \quad + \alpha T \kappa^{-1} Y X_3 u_{i,10} = 0
 \end{aligned} \tag{25}$$

În vederea obținerii ecuațiilor de compatibilitate Beltrami-Mitchell, celor șapte sisteme de soluții independente ale ecuațiilor vom impune condițiile următoare:

$$v_{i4} = v_{i5} = v_{i6} = 0 \quad (i=1,2,3,4) \quad v_{55} = v_{56} = 0, \quad v_{64} = v_{66} = 0, \quad v_{74} = v_{75} = 0.$$

După efectuarea calculelor obținem următoarele două matrici:

$$\begin{aligned}
 U = & \begin{pmatrix} X_1 & 0 & 0 & V_1 & U_1 & U_1 \\ 0 & X_2 & 0 & U_2 & V_2 & U_2 \\ 0 & 0 & X_3 & U_3 & U_3 & V_3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha}{3} T_0 Y & -\frac{\alpha}{3} T_0 Y & -\frac{\alpha}{3} T_0 Y \\ X_2 & X_1 & 0 & -\lambda \frac{x}{3} X_1 X_2 & -\lambda \frac{x}{3} X_1 X_2 & 2(\lambda + \mu) \frac{x}{3} X_1 X_3 \\ 0 & X_3 & X_2 & 2(\lambda + \mu) \frac{x}{3} X_2 X_3 & -\lambda \frac{x}{3} X_2 X_3 & -\lambda \frac{x}{3} X_2 X_3 \\ X_3 & 0 & X_1 & -\lambda \frac{x}{3} X_3 X_1 & 2(\lambda + \mu) \frac{x}{3} X_3 X_1 & -\lambda \frac{x}{3} X_3 X_1 \end{pmatrix} \rightarrow \\
 & \begin{pmatrix} -X_1 X_2 & 0 & -X_1 X_3 & 0 \\ -X_2 X_1 & -X_2 X_3 & 0 & 0 \\ 0 & -X_3 X_2 & -X_3 X_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \rightarrow P_3 & -X_1 X_3 & -X_2 X_3 & 0 \\ -X_2 X_1 & P_1 & -X_3 X_1 & 0 \\ -X_1 X_2 & -X_3 X_2 & P_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{26}
 \end{aligned}$$

$$V = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu)Z_1 & U_1 & U_1 \\ U_2 & (\lambda + \mu)Z_2 & U_2 \\ U_3 & U_3 & (\lambda + \mu)Z_3 \\ -\frac{\alpha}{3} T_0 Y & -\frac{\alpha}{3} T_0 Y & -\frac{\alpha}{3} T_0 Y \\ 2(\lambda + \mu) \frac{x}{3} X_1 X_2 & 2(\lambda + \mu) \frac{x}{3} X_1 X_2 & 2(\lambda + \mu) \frac{x}{3} X_1 X_2 \\ 2(\lambda + \mu) \frac{x}{3} X_2 X_3 & 2(\lambda + \mu) \frac{x}{3} X_3 X_3 & 2(\lambda + \mu) \frac{x}{3} X_3 X_3 \\ 2(\lambda + \mu) \frac{x}{3} X_3 X_1 & 2(\lambda + \mu) \frac{x}{3} X_3 X_1 & 2(\lambda + \mu) \frac{x}{3} X_3 X_1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \mu \kappa^{-1} Z_1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \mu \kappa^{-1} Z_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \mu \kappa^{-1} Z_3 \\ 0 & 0 & 0 & R - \alpha^2 \kappa^{-1} T_0 Y \\ \frac{1}{\mu} P^* & 0 & 0 & \frac{2}{3} \alpha \mu X_1 X_1 \\ 0 & \frac{1}{\mu} P^* & 0 & \frac{2}{3} \alpha \mu X_2 X_3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu} P^* & \frac{2}{3} \alpha \mu X_3 X_1 \end{pmatrix} \quad (27)$$

În matricele (26) și (27) am utilizat notațiile următoare:

$$Z_i = \frac{x}{3} \left[\frac{1}{\mu} P^* + X_i^2 \right], \quad V_i = (\lambda + \mu) Z_i - X_i^2,$$

$$U_i = -\frac{\lambda}{2} Z_i + \frac{1}{2} X_i^2, \quad P_i = X_i^2 - \frac{\mu}{\rho} Y^2, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Folosind relațiile (24), (26) și (27) obținem imediat ecuațiile de compatibilitate Beltrami-Mitchell în teoria termoelasticității lineare cuplate:

$$\square_2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{2}{3} \alpha \mu \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} + \left[\frac{\nu}{1-\nu^2} \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2 \sigma_{kk}}{\partial t^2} + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \alpha \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \left(\Delta - \frac{2+\nu}{1+\nu} \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) T \right] \delta_{ij} = -\frac{\partial F_i}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_i} - \frac{\nu}{1-\nu} (\nabla \cdot \vec{F}) \delta_{ij}, \quad (28)$$

$$k \Delta T - (\rho c + \alpha^2 T_0 \kappa^{-1}) \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{3} \alpha T_0 \frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial t} = -Q, \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (29)$$

Din (28) rezultă imediat ecuația diferențială pe care o satisface primul invariant al tensorului tensiune σ_{kk} :

$$\square_1 \sigma_{kk} + \alpha \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[\square_2 + \frac{1}{3} \Delta \right] T = -\frac{1+\nu}{1-\nu} (\nabla \cdot \vec{F}) \quad (30)$$

Ecuatiile (28) în cazul corpului elastic au fost obținute de M. Iacovache [9], P. P. Teodorescu [10] și J. Ignaczak [11, 12].

În lucrarea [13] J. Ignaczak a găsit ecuațiile (28) și pentru un corp termoelastice, considerând însă problema necuplată.

În 1951 V. Ionescu-Cazimir a obținut ecuațiile de compatibilitate (28), (29) în problema cuplată a termoelasticității, considerând cazul cuazistatic [14, 15].

*

În cazul stării de deformare plană (în planul Ox_1x_2) vom avea:

$$\sigma_{33} = \nu S_0 - \frac{2}{3} \alpha \mu (1 + \nu) T, \quad \sigma_{kk} = (1 + \nu) S_0 - \frac{2}{3} \alpha \mu (1 + \nu) T,$$

$$S_0 = \sigma_{11} + \sigma_{22}$$

și din sistemul (28)–(30) găsim următoarele ecuații:

$$\square_2 \sigma_{ij} + \frac{\partial^2 S_0}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\nu}{1 - \nu} \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2 S_0}{\partial t^2} \delta_{ij} + \frac{2}{3} \alpha \mu \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \square_2 T \delta_{ij} =$$

$$= - \frac{\partial F_i}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_i} - \frac{\nu}{1 - \nu} (\nabla \cdot \vec{F}) \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2) \quad (31)$$

$$k \Delta T - \rho c [1 + 2(1 - \nu) \varepsilon] \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\alpha}{3} T_0 (1 + \nu) \frac{\partial S_0}{\partial t} = -Q \quad (32)$$

Adunând și scăzând relațiile (31) vom obține ecuațiile găsite de Nowacki pe altă cale [16]:

$$\square_1 S_0 + \frac{2}{3} \alpha \mu \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \square_2 T = - \frac{1}{1 - \nu} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \sigma_{11} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \sigma_{22} = - \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right) \quad (33)$$

BIBLIOGRAFIE

1. M. A. Biot: Thermoelasticity and irreversible thermodynamics, J. Appl. Physics 27, 3, 1956.
2. P. Chadwick: Thermoelasticity. The dynamical theory, Progress in Solid Mechanics, vol. I., Amsterdam, 1960.
3. Gr. C. Moisil: Teoria preliminară a sistemelor de ecuații cu derivate parțiale cu coeficienți constanți, Bul. Șt. Acad. R.P.R., Seria A, 4, 2, 1952.
4. V. Ionescu-Cazimir: Asupra ecuațiilor echilibrului termoelastice. I. Analogul vectorului Galerkin, Bul. Șt. Acad. R.P.R., Seria A, 2, 7, 1950.
5. M. Iacovache: O extindere a metodei lui Galerkin pentru sistemul ecuațiilor elasticității, Bul. Șt. Acad. R.P.R., Seria A, 1, 6, 1950.
6. M. Cristea: Asupra ecuațiilor micilor mișcări termoelastice, Rev. Univ. „C.I. Parhon“, 1, 1, 1952.
7. W. Nowacki: Green functions for the thermoelastic medium, II., Bul. de l'Acad. Pol. des Sci., Serie IV., 9, 9, 1964.
8. W. Nowacki: Вопросы термоупругости, Москва, 1962.

9. M. Iacovache: Asupra relațiilor dintre tensiuni într-un corp elastic în mișcare, Bul. Șt. Acad. R.P.R., Seria A, 2, 9, 1950.
10. P. P. Teodorescu: Asupra problemei spațiale a elastodinamicii, St. și Cerc. de Mecanică Aplicată, 11, 3, 1960.
11. J. Ignaczak: Direct determination of stress equation of motion in elasticity, Arch. Mech., Stosowanej, 11, 5, 1959.
12. J. Ignaczak: A completeness problem for equations of motion in the linear elasticity, Arch. Mech. Stosowanej, 15, 2, 1963.
13. J. Ignaczak: On the stress equations of motion in linear thermoelasticity Arch. Mech. Stosowanej, 15, 5, 1963.
14. V. Ionescu-Cazimir: Asupra ecuațiilor echilibrului termoeastic, II., Relații între tensiuni și temperatură, Com. Acad. R.P.R., 1, 2, 1951.
15. V. Ionescu-Cazimir: Asupra ecuațiilor echilibrului termoplastic, III. Relații între tensiuni. Com. Acad. R.P.R., 1, 5, 1951.
16. W. Nowacki: On the treatment of the two-dimensional coupled thermoelastic problems in terms of stresses, Bul. de l'Acad. Pol. des Sci., Serie IV, 9, 3, 1961.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТИПА ГАЛЁРКИНА И УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ-МИТЧЕЛЯ В СОВМЕСТНОЙ ТЕОРИИ ТЕРМОУПРУГОСТИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В первой части работы дано представление типа Галёркина в совместной термоупругости для вектора смещения $\vec{u}(\vec{r}, t)$ и для температуры $T(\vec{r}, t)$ с помощью вектора $\vec{\Gamma}(\vec{r}, t)$ и скаляра $G(\vec{r}, t)$ (10)—(13).

Для этого употребляется метод присоединённых матриц [3].

Во второй части работы, употребляя тот же метод, получают уравнения совместности Бельтрами-Митчеля (28)—(30).

Исследуется также плоское состояние деформации (31)—(33).

REPRESENTATION OF GALERKIN AND BELTRAMI-MITCHELL EQUATIONS IN THE THEORY OF COUPLED THERMOELASTICITY

ABSTRACT

In the first part of the paper we give a representation of Galerkin's type, in the linear theory of coupled thermoelasticity, for displacement vector $\vec{u}(\vec{r}, t)$ and for the temperature $T(\vec{r}, t)$, by a vector $\vec{\Gamma}(\vec{r}, t)$ and a scalar $G(\vec{r}, t)$, (10)—(15).

To obtain this representation we used the associated matrices method [3].

In the second part of the paper, using the same method, we obtain the Beltrami-Mitchell compatibility equations, (28)—(30).

We consider also the case of the plane strain.

SPAȚII RIEMANN V_4 ȘI V_5 LOCAL EUCLIDIENE, CU CONEXIUNE CONSTANTĂ

IOANA DRĂGHICI

În această lucrare se determină spațiile riemanniene cu 4 și 5 dimensiuni, local euclidiene și cu conexiune constantă, utilizând algebrele lineare asociative și comutative, de ordinul 4 și 5, ce se asociază acestor spații. Determinarea analogă în două dimensiuni a fost făcută de Prof. G. Vrănceanu [1] p. 368 iar în 3 dimensiuni de P. Mocanu [3]. Prof. G. Vrănceanu în [2] tratează spații riemann cu conexiune constantă nelocal euclidiene în cazul general.

În cursul lucrării vom distinge pe de o parte spațiile reductibile (a căror algebră asociată este reductibilă) și ireductibile și pe de altă parte, vom distinge spațiile echivalente global cu spațiul euclidian (căror le corespund algebre nilpotente) de cele neechivalente global cu spațiul euclidian, a căror algebră asociată A se obține dintr-o algebră nilpotentă, radicalul algebrei A , prin adjuncționare.

Pentru determinarea spațiilor reductibile, vom utiliza rezultatele lui P. Mocanu [2] privind clasificarea algebrelor de ordinul 3 comutative și asociative, iar pentru determinarea spațiilor ireductibile vom utiliza o metodă dată de C. Teleman [4] care permite găsirea algebrelor nilpotente prin inducție în raport cu ordinul algebrelor.

Reamintim că algebra asociată unui spațiu cu conexiune constantă (Γ_{jk}^i) este dată de legile de înmulțire [1]

$$e_i e_j = \Gamma_{ij}^k e_k$$

Fiind date două algebre lineare A, B produsul lor direct $A \times B$ este algebra avînd ca elemente perechile (x, y) care se mai scriu sub forma $x + y$, unde $x \in A$, $y \in B$. Operațiile în $A \times B$ fiind date de formulele

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$(x, y) \cdot (x', y') = (x x', y y')$$

O bază a algebrei $A \times B$ se obține considerînd reuniunea a două baze $\{e_i\}$, $\{f_j\}$, una în A alta în B și adăugînd la legile de înmulțire din A și B relațiile $e_i f_j = 0$.

O algebră este ireductibilă dacă nu se poate defini ca produsul a două algebre de ordine diferite de zero.

Din considerațiile ce urmează va rezulta că orice algebră cu 4 sau 5 dimensiuni admite o descompunere, unică pînă la ordinea factorilor, în produs direct de algebre ireductibile.

Pentru fiecare algebră, indicăm metrica spațiului V_4 sau V_5 corespunzător precum și transformările ce realizează echivalența cu spațiul euclidian.

1. Fie V_4 un spațiu Riemann raportat la coordonatele x^1, x^2, x^3, x^4 local euclidian, în care coeficienții de conexiune Γ_{jk}^i sînt constanți. Determinarea metricilor spațiilor V_4 se obține prin integrarea sistemului de ecuații cu derivate parțiale de primul ordin cu coeficienți constanți

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ik}^s a_{sj} + \Gamma_{jk}^s a_{is}$$

în număr de 40, cu 10 funcții necunoscute, a_{ij} : componentele tensorului metric fundamental al lui V_4 . Deoarece condițiile de integrabilitate sînt identic verificate, metrica lui V_4 depinde de 10 constante arbitare. Se poate încă determina metrica integrînd sistemul

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{jk}^i \frac{\partial u}{\partial x^i} = 0$$

complet integrabil a cărui integrală generală are forma:

$$u = a_0 + a_i u^i$$

unde a_0, a_i sînt constante iar u^i sînt funcții liniar independente; componentele a_{ij} sînt date de ([6], cap. I).

$$a_{ij} = c_{rs} \frac{\partial u^r}{\partial x^i} \frac{\partial u^s}{\partial x^j}$$

unde $c_{rs} = c_{sr}$ sînt constante cu determinantul $|c_{rs}| \neq 0$.

Spațiile V_4 cu conexiune constantă local euclidiene se împart în două clase: reductibile și ireductibile; de asemenea ele se împart în spații global echivalente cu spațiul euclidian E_4 , cînd u^i sînt polinoame și conexiunea contractată este nulă, și spații V_4 care nu sînt global echivalente cu spațiul euclidian E_4 , cînd conexiunea contractată este nenulă.

2. Presupunem $V_4 = V_1(x^1) \times E_1(x^2) \times E_1(x^3) \times E_1(x^4)$ adică V_4 este reductibil fiind produsul cartezian a patru spații unidimensionale, spațiul $V_1(x^1)$ avînd conexiunea afină $\Gamma_{11}^1 = 1$ iar celelalte spații fiind euclidiene. Deoarece $\Gamma_k = \delta_k^1$, V_4 nu este global echivalent cu E_4 și putem lua

$$u^1 = e^{x^1}, \quad u^2 = x^2, \quad u^3 = x^3, \quad u^4 = x^4$$

de unde

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = e^{x^1} \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} = \delta_i^\alpha \quad (\alpha = 2, 3, 4)$$

iar

$$a_{ij} = c_{11} \frac{\partial u^1}{\partial x^i} \frac{\partial u^1}{\partial x^j} + c_{1\beta} \left(\frac{\partial u^1}{\partial x^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^j} + \frac{\partial u^1}{\partial x^j} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^i} \right) + c_{\alpha\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^j}$$

dă

$$a_{ij} = c_{11} e^{2x^1} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{1\beta} e^{x^1} (\delta_i^1 \delta_j^\beta + \delta_j^1 \delta_i^\beta) + c_{\alpha\beta} \delta_i^\alpha \delta_j^\beta$$

Evident în variabilele u^i tensorul metric al lui V_4 este constant: c_{ij}

3. Fie $V_4 = V_1(x^1) \times V_1(x^2) \times E_1(x^3) \times E_1(x^4)$ deci $\Gamma_{11}^1 = 1$, $\Gamma_{22}^2 = 1$, restul nuli; avem $\Gamma_k = \delta_k^1 + \delta_k^2$ și V_4 nu e global echivalent cu E_4

Putem lua:

$$u^1 = e^{x^1}, u^2 = e^{x^2}, u^3 = x^3, u^4 = x^4$$

deci:

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = e^{x^1} \delta_i^1, \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = e^{x^2} \delta_i^2, \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = \delta_i^3 \quad (\alpha = 3, 4)$$

și cum

$$a_{ij} = c_{11} \frac{\partial u^1}{\partial x^i} \frac{\partial u^1}{\partial x^j} + c_{12} \left(\frac{\partial u^1}{\partial x^i} \frac{\partial u^2}{\partial x^j} + \frac{\partial u^1}{\partial x^j} \frac{\partial u^2}{\partial x^i} \right) + c_{22} \frac{\partial u^2}{\partial x^i} \frac{\partial u^2}{\partial x^j} +$$

$$+ c_{1\beta} \left(\frac{\partial u^1}{\partial x^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^j} + \frac{\partial u^1}{\partial x^j} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^i} \right) + c_{2\beta} \left(\frac{\partial u^2}{\partial x^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^j} + \frac{\partial u^2}{\partial x^j} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^i} \right) + c_{\alpha\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^j}$$

rezultă

$$a_{ij} = c_{11} e^{2x^1} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{12} e^{x^1+x^2} (\delta_i^1 \delta_j^2 + \delta_j^1 \delta_i^2) + c_{22} e^{2x^2} \delta_i^2 \delta_j^2 +$$

$$+ c_{1\beta} e^{x^1} (\delta_i^1 \delta_j^\beta + \delta_j^1 \delta_i^\beta) + c_{2\beta} e^{x^2} (\delta_i^2 \delta_j^\beta + \delta_j^2 \delta_i^\beta) + c_{\alpha\beta} \delta_i^\alpha \delta_j^\beta$$

De asemenea în variabilele u^i tensorul metric este constant.

4. Considerăm $V_4 = V_1(x^1) \times V_1(x^2) \times V_1(x^3) \times E_1(x^4)$ deci, $\Gamma_{jk}^i = \delta_1^i \delta_j^1 \delta_k^1 + \delta_2^i \delta_j^2 \delta_k^2 + \delta_3^i \delta_j^3 \delta_k^3$ iar conexiunea contractată

$$\Gamma_k = \delta_k^1 + \delta_k^2 + \delta_k^3$$

și V_4 nu e echivalent global cu E_4 . Putem lua

$$u^1 = e^{x^1}, u^2 = e^{x^2}, u^3 = e^{x^3}, u^4 = x^4$$

de unde

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = e^{x^1} \delta_i^1, \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = e^{x^2} \delta_i^2, \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = e^{x^3} \delta_i^3, \frac{\partial u^4}{\partial x^i} = \delta_i^4$$

și cum

$$a_{ij} = c_{11} \frac{\partial u^1}{\partial x^i} \frac{\partial u^1}{\partial x^j} + c_{12} \left(\frac{\partial u^1}{\partial x^i} \frac{\partial u^2}{\partial x^j} + \frac{\partial u^1}{\partial x^j} \frac{\partial u^2}{\partial x^i} \right) + c_{22} \frac{\partial u^2}{\partial x^i} \frac{\partial u^2}{\partial x^j} +$$

$$+ c_{13} \left(\frac{\partial u^1}{\partial x^i} \frac{\partial u^3}{\partial x^j} + \frac{\partial u^1}{\partial x^j} \frac{\partial u^3}{\partial x^i} \right) + c_{23} \left(\frac{\partial u^2}{\partial x^i} \frac{\partial u^3}{\partial x^j} + \frac{\partial u^2}{\partial x^j} \frac{\partial u^3}{\partial x^i} \right) + c_{33} \frac{\partial u^3}{\partial x^i} \frac{\partial u^3}{\partial x^j} +$$

$$+ c_{14} \left(\frac{\partial u^1}{\partial x^i} \frac{\partial u^4}{\partial x^j} + \frac{\partial u^1}{\partial x^j} \frac{\partial u^4}{\partial x^i} \right) + c_{24} \left(\frac{\partial u^2}{\partial x^i} \frac{\partial u^4}{\partial x^j} + \frac{\partial u^2}{\partial x^j} \frac{\partial u^4}{\partial x^i} \right) + c_{34} \left(\frac{\partial u^3}{\partial x^i} \frac{\partial u^4}{\partial x^j} + \frac{\partial u^3}{\partial x^j} \frac{\partial u^4}{\partial x^i} \right) + \\ + c_{44} \frac{\partial u^4}{\partial x^i} \frac{\partial u^4}{\partial x^j}$$

obținem:

$$a_{ij} = c_{11} e^{2x^1} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{12} e^{x^1+x^2} (\delta_i^1 \delta_j^2 + \delta_j^1 \delta_i^2) + c_{22} e^{2x^2} \delta_i^2 \delta_j^2 + c_{13} e^{x^1+x^3} (\delta_i^1 \delta_j^3 + \delta_j^1 \delta_i^3) + \\ + c_{23} e^{x^2+x^3} (\delta_i^2 \delta_j^3 + \delta_j^2 \delta_i^3) + c_{33} e^{2x^3} \delta_i^3 \delta_j^3 + c_{14} e^{x^1} (\delta_i^1 \delta_j^4 + \delta_j^1 \delta_i^4) + \\ + c_{24} e^{x^2} (\delta_i^2 \delta_j^4 + \delta_j^2 \delta_i^4) + c_{34} e^{x^3} (\delta_i^3 \delta_j^4 + \delta_j^3 \delta_i^4) + c_{44} \delta_i^4 \delta_j^4.$$

5. Fie $V_4 = V_1(x^1) \times V_1(x^2) \times V_1(x^3) \times V_1(x^4)$ cu conexiunea

$$\Gamma_{jk}^i = \delta_i^1 \delta_j^1 \delta_k^1 + \delta_i^2 \delta_j^2 \delta_k^2 + \delta_i^3 \delta_j^3 \delta_k^3 + \delta_i^4 \delta_j^4 \delta_k^4$$

iar conexiunea contractată

$$\Gamma_k = \delta_k^1 + \delta_k^2 + \delta_k^3 + \delta_k^4$$

așa că V_4 nu e global echivalent cu E_4 . Putem lua:

$$u^\alpha = e^{x^\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

deci

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} = e^{x^\alpha} \delta_i^\alpha$$

așa că

$$a_{ij} = c_{rs} e^{x^r+x^s} \delta_i^r \delta_j^s$$

6. Presupunem V_4 produs cartezian a trei spații Riemann local euclidiene cu conexiune constantă, unul din spații de dimensiune doi și două spații unidimensionale; fie $V_4 = V_2(x^1, x^2) \times E_1(x^3) \times E_1(x^4)$ și presupunem conexiunea contractată a lui V_2 nulă deci pentru V_4 avem:

$$\Gamma_{jk}^i = \delta_i^2 \delta_j^1 \delta_k^1 \text{ iar } \Gamma_k = 0$$

și V_4 este global echivalent cu E_4 .

Putem lua

$$u^1 = x^1, \quad u^2 = x^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2, \quad u^3 = x^3, \quad u^4 = x^4$$

de unde

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = \delta_i^2 + \delta_i^1 x^1, \quad \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} = \delta_i^\alpha \quad (\alpha = 3, 4)$$

și avem:

$$a_{ij} = c_{11} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{12} [\delta_i^1 \delta_j^2 + \delta_j^1 \delta_i^1 x^1] + c_{22} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1) (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) + \\ + c_{13} (\delta_i^1 \delta_j^3 + \delta_j^1 \delta_i^3) + c_{23} [\delta_i^2 (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^1) + \delta_j^2 (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^1)] + c_{\alpha\beta} \delta_i^\alpha \delta_j^\beta$$

care sînt polinoame de grad cel mult doi în x^1 .

7. Considerăm $V_4 = V_2(x^1, x^2) \times E_1(x^3) \times E_1(x^4)$ și conexiunea contractată a lui V_2 *nenuță*: deci în V_4 avem:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = 1 \text{ restul nuli și } \Gamma_k = 2\delta_k^1$$

ce arată că V_4 nu e global echivalent cu E_4 . Putem lua

$$u^1 = e^{x^1}, \quad u^2 = x^2 e^{x^1}, \quad u^3 = x^3, \quad u^4 = x^4$$

de unde

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = e^{x^1} \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = e^{x^1} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2), \quad \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} = \delta_i^\alpha \quad (\alpha = 3, 4)$$

ceea ce ne dă

$$\begin{aligned} a_{ij} = & c_{11} e^{2x^1} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{12} e^{2x^1} [\delta_i^1 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + \delta_j^1 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2)] + \\ & + c_{22} e^{2x^1} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2) (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + c_{1\beta} e^{x^1} (\delta_i^1 \delta_j^\beta + \delta_i^\beta \delta_j^1) + \\ & + c_{2\beta} e^{x^1} [\delta_i^2 (\delta_j^\beta + \delta_j^1 x^2) + \delta_j^\beta (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2)] + c_{\alpha\beta} \delta_i^\alpha \delta_j^\beta \end{aligned}$$

8. Fie $V_4 = V_2(x^1, x^2) \times E_1(x^3) \times E_1(x^4)$ și V_2 reductibil în complex. Avem pentru V_4

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = 1 \text{ restul nuli și } \Gamma_k = 2\delta_k^1$$

așa că V_4 nu e global echivalent cu E_4 . Putem lua

$$u^1 = e^{x^1} \cos x^2, \quad u^2 = e^{x^1} \sin x^2, \quad u^\alpha = x^\alpha \quad (\alpha = 3, 4)$$

de unde

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = e^{x^1} (\delta_i^1 \cos x^2 - \delta_i^2 \sin x^2), \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = e^{x^1} (\delta_i^1 \sin x^2 + \delta_i^2 \cos x^2), \quad \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} = \delta_i^\alpha$$

și avem:

$$\begin{aligned} a_{ij} = & c_{11} e^{2x^1} (\delta_i^1 \cos x^2 - \delta_i^2 \sin x^2) (\delta_j^1 \cos x^2 - \delta_j^2 \sin x^2) + \\ & + c_{12} e^{2x^1} [(\delta_i^1 \cos x^2 - \delta_i^2 \sin x^2) (\delta_j^1 \sin x^2 + \delta_j^2 \cos x^2) + \\ & + (\delta_j^1 \cos x^2 - \delta_j^2 \sin x^2) (\delta_i^1 \sin x^2 + \delta_i^2 \cos x^2)] + \\ & + c_{22} e^{2x^1} (\delta_i^1 \sin x^2 + \delta_i^2 \cos x^2) (\delta_j^1 \sin x^2 + \delta_j^2 \cos x^2) + \\ & + c_{1\beta} e^{x^1} [\delta_i^1 (\delta_j^\beta \cos x^2 - \delta_j^2 \sin x^2) + \delta_j^\beta (\delta_i^1 \cos x^2 - \delta_i^2 \sin x^2)] + \\ & + c_{2\beta} e^{x^1} [\delta_i^2 (\delta_j^\beta \sin x^2 + \delta_j^2 \cos x^2) + \delta_j^\beta (\delta_i^2 \sin x^2 + \delta_i^2 \cos x^2)] + c_{\alpha\beta} \delta_i^\alpha \delta_j^\beta \end{aligned}$$

9. Fie $V_4 = V_2(x^1, x^2) \times V_1(x^3) \times E_1(x^4)$ și conexiunea contractată a lui V_2 *nulă* deci pentru V_4 avem:

$\Gamma_{jk}^i = \delta_2^i \delta_j^1 \delta_k^1 + \delta_3^i \delta_j^2 \delta_k^2$ cu $\Gamma_k = \delta_k^3$ ce arată că V_4 nu este global echivalent cu E_4 . Putem lua:

$$u^1 = x^1, \quad u^2 = x^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2, \quad u^3 = e^{x^3}, \quad u^4 = x^4$$

deci :

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = \delta_i^2 + \delta_i^1 x^1, \quad \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = e^{x^3} \delta_i^3, \quad \frac{\partial u^4}{\partial x^i} = \delta_i^4$$

de unde

$$\begin{aligned} a_{ij} = & c_{11} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{12} [\delta_i^1 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) + \delta_j^1 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1)] + c_{22} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1) (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) + \\ & + c_{13} e^{x^3} (\delta_i^1 \delta_j^3 + \delta_j^1 \delta_i^3) + c_{23} e^{x^3} [\delta_i^3 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) + \delta_j^3 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1)] + \\ & + c_{33} e^{2x^3} \delta_i^3 \delta_j^3 + c_{14} (\delta_i^1 \delta_j^4 + \delta_j^1 \delta_i^4) + c_{24} [\delta_i^4 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) + \delta_j^4 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1)] + \\ & + c_{34} e^{x^3} (\delta_i^3 \delta_j^4 + \delta_j^3 \delta_i^4) + c_{44} \delta_i^4 \delta_j^4 \end{aligned}$$

10. Considerăm $V_4 = V_2(x^1, x^2) \times V_1(x^3) \times E_1(x^4)$ în care conexiunea contractată a lui V_2 este *nenulă*. Avem pentru V_4

$$\Gamma_{jk}^i = \delta_i^1 \delta_j^1 \delta_k^1 + \delta_i^2 \delta_j^1 \delta_k^2 + \delta_i^2 \delta_j^2 \delta_k^2 + \delta_i^3 \delta_j^3 \delta_k^3 \text{ deci } \Gamma_k = 2\delta_k^1 + \delta_k^3$$

și V_4 nu este echivalent global cu E_4 . Putem lua :

$$u^1 = e^{x^1}, \quad u^2 = x^2 e^{x^1}, \quad u^3 = e^{x^3}, \quad u^4 = x^4$$

de unde

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = e^{x^1} \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = e^{x^1} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2), \quad \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = e^{x^3} \delta_i^3, \quad \frac{\partial u^4}{\partial x^i} = \delta_i^4$$

ceea ce dă

$$\begin{aligned} a_{ij} = & c_{11} e^{2x^1} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{12} e^{2x^1} [\delta_i^1 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + \delta_j^1 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2)] + \\ & + c_{22} e^{2x^1} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2) (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + c_{13} e^{x^1+x^3} (\delta_i^1 \delta_j^3 + \delta_j^1 \delta_i^3) + \\ & + c_{23} e^{x^1+x^3} [\delta_i^3 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + \delta_j^3 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2)] + c_{33} e^{2x^3} \delta_i^3 \delta_j^3 + \\ & + c_{14} e^{x^1} (\delta_i^1 \delta_j^4 + \delta_j^1 \delta_i^4) + c_{24} e^{x^1} [\delta_i^4 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + \delta_j^4 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2)] \\ & + c_{34} e^{x^3} (\delta_i^3 \delta_j^4 + \delta_j^3 \delta_i^4) + c_{44} \delta_i^4 \delta_j^4 \end{aligned}$$

11. Fie $V_4 = V_2(x^1, x^2) \times V_1(x^3) \times E_1(x^4)$ și V_2 reductibil în complex; avem pentru V_4

$\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{33}^3 = 1$ restul nuli și $\Gamma_k = 2\delta_k^1 + \delta_k^3$ și V_4 nu este echivalent global cu E_4 . Putem lua

$$u^1 = e^{x^1} \cos x^2, \quad u^2 = e^{x^1} \sin x^2, \quad u^3 = e^{x^3}, \quad u^4 = x^4$$

de unde

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = e^{x^1} (\delta_i^1 \cos x^2 - \delta_i^2 \sin x^2), \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = e^{x^1} (\delta_i^1 \sin x^2 + \delta_i^2 \cos x^2),$$

$$\frac{\partial u^3}{\partial x^i} = e^{x^3} \delta_i^3, \quad \frac{\partial u^4}{\partial x^i} = \delta_i^4$$

Obținem:

$$\begin{aligned} a_{ij} = & c_{11}e^{2x^1}(\delta_i^1 \cos x^2 - \delta_i^2 \sin x^2)(\delta_j^1 \cos x^2 - \delta_j^2 \sin x^2) + \\ & + c_{12}e^{2x^1}[(\delta_i^1 \cos x^2 - \delta_i^2 \sin x^2)(\delta_j^1 \sin x^2 + \delta_j^2 \cos x^2) + \\ & + (\delta_j^1 \cos x^2 - \delta_j^2 \sin x^2)(\delta_i^1 \sin x^2 + \delta_i^2 \cos x^2)] + c_{22}e^{2x^1}(\delta_i^1 \sin x^2 + \\ & + \delta_i^2 \cos x^2)(\delta_j^1 \sin x^2 + \delta_j^2 \cos x^2) + c_{13}e^{x^1+x^3}[\delta_i^3(\delta_j^1 \cos x^2 - \delta_j^2 \sin x^2) + \\ & + \delta_j^3(\delta_i^1 \cos x^2 - \delta_i^2 \sin x^2)] + c_{23}e^{x^1+x^3}[\delta_i^3(\delta_j^1 \sin x^2 + \delta_j^2 \cos x^2) + \\ & + \delta_j^3(\delta_i^1 \sin x^2 + \delta_i^2 \cos x^2)] + c_{33}e^{2x^3}\delta_i^3\delta_j^3 + c_{14}e^{x^1}[\delta_i^4(\delta_j^1 \cos x^2 - \delta_j^2 \sin x^2) + \\ & + \delta_j^4(\delta_i^1 \cos x^2 - \delta_i^2 \sin x^2)] + c_{24}e^{x^1}[\delta_i^4(\delta_j^1 \sin x^2 + \delta_j^2 \cos x^2) + \\ & + \delta_j^4(\delta_i^1 \sin x^2 + \delta_i^2 \cos x^2)] + c_{34}e^{x^3}(\delta_i^3\delta_j^4 + \delta_j^3\delta_i^4) + c_{44}\delta_i^4\delta_j^4 \end{aligned}$$

12. Fie $V_4 = V_2(x^1, x^2) \times V_1(x^3) \times V_1(x^4)$ și presupun conexiunea contractată a lui V_2 nulă. Avem pentru V_4

$$\Gamma_{jk}^i = \delta_2^i \delta_j^1 \delta_k^1 + \delta_3^i \delta_j^3 \delta_k^3 + \delta_4^i \delta_j^4 \delta_k^4$$

de unde

$$\Gamma_k^k = \delta_k^3 + \delta_k^4$$

și V_4 nu este global echivalent cu E_4 . Putem lua

$$u^1 = x^1, \quad u^2 = x^2 + \frac{1}{2}(x^1)^2, \quad u^3 = e^{x^3}, \quad u^4 = e^{x^4}$$

de unde

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = \delta_i^2 + \delta_i^1 x^1, \quad \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = e^{x^3} \delta_i^3, \quad \frac{\partial u^4}{\partial x^i} = e^{x^4} \delta_i^4$$

ceea ce dă

$$\begin{aligned} a_{ij} = & c_{11}\delta_i^1\delta_j^1 + c_{12}[\delta_i^1(\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) + \delta_j^1(\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1)] + c_{22}(\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1)(\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) + \\ & + c_{13}e^{x^3}(\delta_i^3\delta_j^3 + \delta_j^3\delta_i^3) + c_{23}e^{x^3}[\delta_i^3(\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) + \delta_j^3(\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1)] + \\ & + c_{33}e^{2x^3}\delta_i^3\delta_j^3 + c_{14}e^{x^4}(\delta_i^4\delta_j^4 + \delta_j^4\delta_i^4) + c_{24}[\delta_i^4(\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) + \delta_j^4(\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1)] + \\ & + c_{34}e^{x^3+x^4}(\delta_i^3\delta_j^4 + \delta_j^3\delta_i^4) + c_{44}e^{2x^4}\delta_i^4\delta_j^4 \end{aligned}$$

13. Fie $V_4 = V_2(x^1, x^2) \times V_1(x^3) \times V_1(x^4)$ și presupunem conexiunea contractată a lui V_2 nenulă. Avem pentru V_4

$$\Gamma_{jk}^i = \delta_1^i \delta_j^1 \delta_k^1 + \delta_2^i \delta_j^1 \delta_k^2 + \delta_2^i \delta_k^1 \delta_j^2 + \delta_3^i \delta_j^3 \delta_k^3 + \delta_4^i \delta_j^4 \delta_k^4 \quad \text{deci}$$

$\Gamma_k^k = 2\delta_k^1 + \delta_k^3 + \delta_k^4$ așa că V_4 nu e global echivalent cu E_4 . Putem lua

$$u^1 = e^{x^1}, \quad u^2 = x^2 e^{x^1}, \quad u^3 = e^{x^3}, \quad u^4 = e^{x^4}$$

de unde

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = e^{x^1} \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = e^{x^1} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2), \quad \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = e^{x^3} \delta_i^3, \quad \frac{\partial u^4}{\partial x^i} = e^{x^4} \delta_i^4$$

ceea ce dă

$$\begin{aligned} a_{ij} = & c_{11} e^{2x^1} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{12} e^{2x^1} [\delta_i^1 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + \delta_j^1 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2)] + \\ & + c_{22} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2) (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + c_{13} e^{x^1+x^3} (\delta_i^1 \delta_j^3 + \delta_j^1 \delta_i^3) + c_{23} [\delta_i^3 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + \\ & + \delta_j^3 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2)] + c_{33} e^{2x^3} \delta_i^3 \delta_j^3 + c_{14} e^{x^1+x^4} (\delta_i^1 \delta_j^4 + \delta_j^1 \delta_i^4) + \\ & + c_{24} e^{x^1+x^4} [\delta_i^4 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + \delta_j^4 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2)] + \\ & + c_{34} e^{x^3+x^4} (\delta_i^3 \delta_j^4 + \delta_j^3 \delta_i^4) + c_{44} e^{2x^4} \delta_i^4 \delta_j^4 \end{aligned}$$

14. Fie $V_4 = V_2(x^1, x^2) \times V_1(x^3) \times V_1(x^4)$ și V_2 reductibil în complex. Avem pentru V_4

$$\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{33}^3 = \Gamma_{44}^4 = 1$$

restul nuli deci

$\Gamma_k = 2\delta_k^1 + \delta_k^3 + \delta_k^4$ și V_4 nu e global echivalent cu E_4 . Putem lua:

$$u^1 = e^{x^1} \cos x^2, \quad u^2 = e^{x^1} \sin x^2, \quad u^3 = e^{x^3}, \quad u^4 = e^{x^4}$$

de unde

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^1}{\partial x^i} &= e^{x^1} (\delta_i^1 \cos x^2 - \delta_i^2 \sin x^2), \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = e^{x^1} (\delta_i^1 \sin x^2 + \delta_i^2 \cos x^2), \\ \frac{\partial u^3}{\partial x^i} &= e^{x^3} \delta_i^3, \quad \frac{\partial u^4}{\partial x^i} = e^{x^4} \delta_i^4 \end{aligned}$$

Avem:

$$\begin{aligned} a_{ij} = & c_{11} e^{2x^1} (\delta_i^1 \cos x^2 - \delta_i^2 \sin x^2) (\delta_j^1 \cos x^2 - \delta_j^2 \sin x^2) + \\ & + c_{12} e^{2x^1} [(\delta_i^1 \cos x^2 - \delta_i^2 \sin x^2) (\delta_j^1 \sin x^2 + \delta_j^2 \cos x^2) + (\delta_j^1 \cos x^2 - \delta_j^2 \sin x^2) \\ & + (\delta_i^1 \sin x^2 + \delta_i^2 \cos x^2)] + c_{22} (\delta_i^1 \sin x^2 + \delta_i^2 \cos x^2) (\delta_j^1 \sin x^2 + \delta_j^2 \cos x^2) + \\ & + c_{13} e^{x^1+x^3} [\delta_i^3 (\delta_j^1 \cos x^2 - \delta_j^2 \sin x^2) + \delta_j^3 (\delta_i^1 \cos x^2 - \delta_i^2 \sin x^2)] + \\ & + c_{23} e^{x^1+x^3} [\delta_i^3 (\delta_j^1 \sin x^2 + \delta_j^2 \cos x^2) + \delta_j^3 (\delta_i^1 \sin x^2 + \delta_i^2 \cos x^2)] + \\ & + c_{33} e^{2x^3} \delta_i^3 \delta_j^3 + c_{14} [\delta_i^4 (\delta_j^1 \cos x^2 - \delta_j^2 \sin x^2) + \delta_j^4 (\delta_i^1 \cos x^2 - \delta_i^2 \sin x^2)] + \\ & + c_{24} e^{x^1+x^4} [\delta_i^4 (\delta_j^1 \sin x^2 + \delta_j^2 \cos x^2) + \delta_j^4 (\delta_i^1 \sin x^2 + \delta_i^2 \cos x^2)] + \\ & + c_{34} e^{x^3+x^4} (\delta_i^3 \delta_j^4 + \delta_j^3 \delta_i^4) + c_{44} e^{2x^4} \delta_i^4 \delta_j^4 \end{aligned}$$

15. Fie $V_4 = V_2(x^1, x^2) \times V_2(x^3, x^4)$ și presupunem conexiunea contractată a lui $V_2(x^1, x^2)$ și $V_2(x^3, x^4)$ nulă. Avem pentru V_4

$$\Gamma_{jk}^i = \delta_2^i \delta_j^1 \delta_k^1 + \delta_4^i \delta_j^3 \delta_k^3$$

și $\Gamma_k = 0$ deci V_4 este echivalent global cu E_4 . Putem lua

$$u^1 = x^1, \quad u^2 = x^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2, \quad u^3 = x^3, \quad u^4 = x^4 + \frac{1}{2} (x^3)^2$$

deci

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = \delta_i^2 + \delta_i^1 x^1, \quad \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = \delta_i^3, \quad \frac{\partial u^4}{\partial x^i} = \delta_i^4 + \delta_i^3 x^3$$

Avem deci:

$$\begin{aligned} a_{ij} = & c_{11} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{12} [\delta_i^1 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) + \delta_j^1 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1)] + c_{22} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1) (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) + \\ & + c_{13} (\delta_i^1 \delta_j^3 + \delta_j^1 \delta_i^3) + c_{23} [\delta_i^3 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) + \delta_j^3 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1)] + c_{33} \delta_i^3 \delta_j^3 + \\ & + c_{14} [\delta_i^1 (\delta_j^4 + \delta_j^3 x^3) + \delta_j^1 (\delta_i^4 + \delta_i^3 x^3)] + c_{24} [(\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1) (\delta_j^4 + \delta_j^3 x^3) + \\ & + (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) (\delta_i^4 + \delta_i^3 x^3)] + c_{34} [\delta_i^3 (\delta_j^4 + \delta_j^3 x^3) + \delta_j^3 (\delta_i^4 + \delta_i^3 x^3)] + \\ & + c_{44} (\delta_i^4 + \delta_i^3 x^3) (\delta_j^4 + \delta_j^3 x^3) \end{aligned}$$

care sînt polinoame de grad cel mult doi.

16. Considerăm acum $V_4 = V_2(x^1, x^2) \times V_2(x^3, x^4)$ și presupunem pentru $V_2(x^1, x^2)$ conexiunea contractată *nulă* iar pentru $V_2(x^3, x^4)$ *nenulă*. Avem

$$\Gamma_{jk}^i = \delta_2^i \delta_j^1 \delta_k^1 + \delta_3^i \delta_j^3 \delta_k^3 + \delta_4^i \delta_j^3 \delta_k^4 + \delta_4^i \delta_k^3 \delta_j^4 \quad \text{și} \quad \Gamma_k = 2\delta_k^3$$

deci V_4 nu este global echivalent cu E_4 . Putem lua:

$$u^1 = x^1, \quad u^2 = x^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2, \quad u^3 = e^{x^3}, \quad u^4 = x^4 e^{x^3}$$

deci

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = \delta_i^2 + \delta_i^1 x^1, \quad \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = e^{x^3} \delta_i^3, \quad \frac{\partial u^4}{\partial x^i} = e^{x^3} (\delta_i^4 + \delta_i^3 x^4)$$

Avem deci:

$$\begin{aligned} a_{ij} = & c_{11} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{12} [\delta_i^1 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) + \delta_j^1 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1)] + c_{22} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1) (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) + \\ & + c_{13} e^{x^3} (\delta_i^1 \delta_j^3 + \delta_j^1 \delta_i^3) + c_{23} e^{x^3} [\delta_i^3 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) + \delta_j^3 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1)] + c_{33} e^{2x^3} \delta_i^3 \delta_j^3 + \\ & + c_{14} e^{x^3} [\delta_i^1 (\delta_j^4 + \delta_j^3 x^4) + \delta_j^1 (\delta_i^4 + \delta_i^3 x^4)] + c_{24} e^{x^3} [(\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1) (\delta_j^4 + \delta_j^3 x^4) + \\ & + (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) (\delta_i^4 + \delta_i^3 x^4)] + c_{34} e^{2x^3} [\delta_i^3 (\delta_j^4 + \delta_j^3 x^4) + \delta_j^3 (\delta_i^4 + \delta_i^3 x^4)] + \\ & + c_{44} e^{2x^3} (\delta_i^4 + \delta_i^3 x^4) (\delta_j^4 + \delta_j^3 x^4) \end{aligned}$$

17. Fie $V_4 = V_2(x^1, x^2) \times V_2(x^3, x^4)$ și presupunem conexiunea contractată a lui $V_2(x^1, x^2)$ și $V_2(x^3, x^4)$ *nenulă*. Avem

$$\Gamma_{jk}^i = \delta_1^i \delta_j^1 \delta_k^1 + \delta_2^i \delta_j^1 \delta_k^2 + \delta_2^i \delta_k^1 \delta_j^2 + \delta_3^i \delta_j^3 \delta_k^3 + \delta_4^i \delta_j^3 \delta_k^4 + \delta_4^i \delta_k^3 \delta_j^4$$

și

$$\Gamma_k = 2\delta_k^1 + 2\delta_k^3$$

deci V_4 nu este global echivalent cu E_4 . Putem lua

$$u^1 = e^{x^1}, \quad u^2 = x^2 e^{x^1}, \quad u^3 = e^{x^3}, \quad u^4 = x^4 e^{x^3}$$

deci :

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = e^{x^1} \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = e^{x^1} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2), \quad \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = e^{x^3} \delta_i^3, \quad \frac{\partial u^4}{\partial x^i} = e^{x^3} (\delta_i^4 + \delta_i^3 x^4)$$

Avem :

$$\begin{aligned} a_{ij} = & c_{11} e^{2x^1} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{12} e^{2x^1} [\delta_i^1 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + \delta_j^1 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2)] + \\ & + c_{22} e^{2x^1} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2) (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + c_{13} e^{x^1+x^3} (\delta_i^1 \delta_j^3 + \delta_j^1 \delta_i^3) + \\ & + c_{23} e^{x^1+x^3} [\delta_i^1 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + \delta_j^1 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2)] + c_{33} e^{2x^3} \delta_i^3 \delta_j^3 + \\ & + c_{14} e^{x^1+x^3} [\delta_i^1 (\delta_j^4 + \delta_j^3 x^4) + \delta_j^1 (\delta_i^4 + \delta_i^3 x^4)] + c_{24} e^{x^1+x^3} [(\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2) (\delta_j^4 + \delta_j^3 x^4) + \\ & + (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) (\delta_i^4 + \delta_i^3 x^4)] + c_{34} e^{2x^3} [\delta_i^3 (\delta_j^4 + \delta_j^3 x^4) + \delta_j^3 (\delta_i^4 + \delta_i^3 x^4)] + \\ & + c_{44} e^{2x^3} (\delta_i^4 + \delta_i^3 x^4) (\delta_j^4 + \delta_j^3 x^4) \end{aligned}$$

18. Considerăm $V_4 = V_2(x^1, x^2) \times V_2(x^3, x^4)$ și presupunem pentru $V_2(x^1, x^2)$ conexiunea contractată nulă iar pe $V_2(x^3, x^4)$ reductibil în complex. Avem

$$\Gamma_{jk}^i = \delta_i^2 \delta_j^1 \delta_k^1 + \delta_i^3 \delta_j^3 \delta_k^3 + \delta_i^4 \delta_j^3 \delta_k^4 + \delta_i^4 \delta_j^3 \delta_k^4 - \delta_i^3 \delta_j^4 \delta_k^4 \quad \text{și} \quad \Gamma_k = 2\delta_k^3$$

așa că V_4 nu este global echivalent cu E_4 . Putem lua

$$u^1 = x^1, \quad u^2 = x^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2, \quad u^3 = e^{x^3} \cos x^4, \quad u^4 = e^{x^3} \sin x^4$$

de unde

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^1}{\partial x^i} &= \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = \delta_i^2 + \delta_i^1 x^1, \quad \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = e^{x^3} (\delta_i^3 \cos x^4 - \delta_i^4 \sin x^4), \\ \frac{\partial u^4}{\partial x^i} &= e^{x^3} (\delta_i^3 \sin x^4 + \delta_i^4 \cos x^4) \end{aligned}$$

și avem :

$$\begin{aligned} a_{ij} = & c_{11} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{12} [\delta_i^1 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) + \delta_j^1 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1)] + c_{22} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1) (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) + \\ & + c_{13} e^{x^3} [\delta_i^1 (\delta_j^3 \cos x^4 - \delta_j^4 \sin x^4) + \delta_j^1 (\delta_i^3 \cos x^4 - \delta_i^4 \sin x^4)] + \\ & + c_{23} e^{x^3} [(\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1) (\delta_j^3 \cos x^4 - \delta_j^4 \sin x^4) + (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) (\delta_i^3 \cos x^4 - \delta_i^4 \sin x^4)] + \\ & + c_{33} e^{2x^3} (\delta_i^3 \cos x^4 - \delta_i^4 \sin x^4) (\delta_j^3 \cos x^4 - \delta_j^4 \sin x^4) + \\ & + c_{14} e^{x^3} [\delta_i^1 (\delta_j^3 \sin x^4 + \delta_j^4 \cos x^4) + \delta_j^1 (\delta_i^3 \sin x^4 + \delta_i^4 \cos x^4)] + \\ & + c_{24} e^{x^3} [(\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1) (\delta_j^3 \sin x^4 + \delta_j^4 \cos x^4) + (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) (\delta_i^3 \sin x^4 + \delta_i^4 \cos x^4)] + \\ & + c_{34} e^{2x^3} [(\delta_i^3 \cos x^4 - \delta_i^4 \sin x^4) (\delta_j^3 \sin x^4 + \delta_j^4 \cos x^4) + \\ & + (\delta_j^3 \cos x^4 - \delta_j^4 \sin x^4) (\delta_i^3 \sin x^4 + \delta_i^4 \cos x^4)] + \\ & + c_{44} e^{2x^3} (\delta_i^3 \sin x^4 + \delta_i^4 \cos x^4) (\delta_j^3 \sin x^4 + \delta_j^4 \cos x^4) \end{aligned}$$

19. Fie $V_4 = V_2(x^1, x^2) \times V_2(x^3, x^4)$ și presupunem conexiunea contractată a lui $V_2(x^1, x^2)$ nenulă și $V_2(x^3, x^4)$ reductibil în complex. Conexiunea lui V_4 este:

$$\Gamma_{jk}^i = \delta_1^i \delta_j^1 \delta_k^1 + \delta_2^i \delta_j^1 \delta_k^2 + \delta_2^i \delta_k^1 \delta_j^2 + \delta_3^i \delta_j^3 \delta_k^3 + \delta_4^i \delta_j^3 \delta_k^4 + \delta_4^i \delta_k^3 \delta_j^4 - \delta_3^i \delta_j^4 \delta_k^4$$

iar $\Gamma_k = 2\delta_k^1 + 2\delta_k^3$ așa că V_4 nu este global echivalent cu E_4 .
Putem lua

$$u^1 = e^{x^1}, \quad u^2 = x^2 e^{x^1}, \quad u^3 = e^{x^3} \cos x^4, \quad u^4 = e^{x^3} \sin x^4$$

de unde

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = e^{x^1} \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = e^{x^1} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2), \quad \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = e^{x^3} (\delta_i^3 \cos x^4 - \delta_i^4 \sin x^4),$$

$$\frac{\partial u^4}{\partial x^i} = e^{x^3} (\delta_i^3 \sin x^4 + \delta_i^4 \cos x^4)$$

ceea ce dă

$$\begin{aligned} a_{ij} = & c_{11} e^{2x^1} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{12} e^{2x^1} [\delta_i^1 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + \delta_j^1 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2)] + \\ & + c_{22} e^{2x^1} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2) (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + c_{13} e^{x^1 + x^3} [\delta_i^1 (\delta_j^3 \cos x^4 - \delta_j^4 \sin x^4) + \\ & + \delta_j^1 (\delta_i^3 \cos x^4 - \delta_i^4 \sin x^4)] + c_{23} e^{x^1 + x^3} [(\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2) (\delta_j^3 \cos x^4 - \delta_j^4 \sin x^4) + \\ & + (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) (\delta_i^3 \cos x^4 - \delta_i^4 \sin x^4)] + c_{33} e^{2x^3} (\delta_i^3 \cos x^4 - \delta_i^4 \sin x^4) (\delta_j^3 \cos x^4 - \\ & - \delta_j^4 \sin x^4) + c_{14} e^{x^1 + x^3} [\delta_i^1 (\delta_j^3 \sin x^4 + \delta_j^4 \cos x^4) + \delta_j^1 (\delta_i^3 \sin x^4 + \delta_i^4 \cos x^4)] + \\ & + c_{24} e^{x^1 + x^3} [(\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2) (\delta_j^3 \sin x^4 + \delta_j^4 \cos x^4) + (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) (\delta_i^3 \sin x^4 + \\ & + \delta_i^4 \cos x^4)] + c_{34} e^{2x^3} [(\delta_i^3 \cos x^4 - \delta_i^4 \sin x^4) (\delta_j^3 \sin x^4 + \delta_j^4 \cos x^4) + \\ & + (\delta_j^3 \cos x^4 - \delta_j^4 \sin x^4) (\delta_i^3 \sin x^4 + \delta_i^4 \cos x^4)] + \\ & + c_{44} e^{2x^3} (\delta_i^3 \sin x^4 + \delta_i^4 \cos x^4) (\delta_j^3 \sin x^4 + \delta_j^4 \cos x^4) \end{aligned}$$

20. Presupunem $V_4 = V_2(x^1, x^2) \times V_2(x^3, x^4)$ și $V_2(x^1, x^2)$, $V_2(x^3, x^4)$ reductibile în complex. Pentru conexiune avem:

$$\Gamma_{jk}^i = \delta_1^i \delta_j^1 \delta_k^1 + \delta_2^i \delta_j^1 \delta_k^2 + \delta_2^i \delta_k^1 \delta_j^2 - \delta_1^i \delta_j^2 \delta_k^2 + \delta_3^i \delta_j^3 \delta_k^3 + \delta_4^i \delta_j^3 \delta_k^4 + \delta_3^i \delta_k^3 \delta_j^4 - \delta_4^i \delta_j^4 \delta_k^4$$

și $\Gamma_k = 2\delta_k^1 + 2\delta_k^3$ deci V_4 nu e global echivalent cu E_4 . Putem lua

$$u^1 = e^{x^1} \cos x^2, \quad u^2 = e^{x^1} \sin x^2, \quad u^3 = e^{x^3} \cos x^4, \quad u^4 = e^{x^3} \sin x^4$$

de unde

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = e^{x^1} (\delta_i^1 \cos x^2 - \delta_i^2 \sin x^2), \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = e^{x^1} (\delta_i^1 \sin x^2 + \delta_i^2 \cos x^2),$$

$$\frac{\partial u^3}{\partial x^i} = e^{x^3} (\delta_i^3 \cos x^4 - \delta_i^4 \sin x^4), \quad \frac{\partial u^4}{\partial x^i} = e^{x^3} (\delta_i^3 \sin x^4 + \delta_i^4 \cos x^4)$$

Avem deci :

$$\begin{aligned}
 a_{ij} = & c_{11}e^{2x^1}(\delta_i^1 \cos x^2 - \delta_i^2 \sin x^2)(\delta_j^1 \cos x^2 - \delta_j^2 \sin x^2) + \\
 & + c_{12}e^{2x^1}[(\delta_i^1 \cos x^2 - \delta_i^2 \sin x^2)(\delta_j^1 \sin x^2 + \delta_j^2 \cos x^2) + (\delta_j^1 \cos x^2 - \\
 & - \delta_j^2 \sin x^2)(\delta_i^1 \sin x^2 + \delta_i^2 \cos x^2)] + c_{22}e^{2x^1}(\delta_i^1 \sin x^2 + \delta_i^2 \cos x^2)(\delta_j^1 \sin x^2 + \\
 & + \delta_j^2 \cos x^2) + c_{13}e^{x^1+x^3}[(\delta_i^1 \cos x^2 - \delta_i^2 \sin x^2)(\delta_j^3 \cos x^4 - \delta_j^4 \sin x^4) + \\
 & + (\delta_j^1 \cos x^2 - \delta_j^2 \sin x^2)(\delta_i^3 \cos x^4 - \delta_i^4 \sin x^4)] + c_{23}e^{x^1+x^3}[(\delta_i^1 \sin x^2 + \\
 & + \delta_i^2 \cos x^2)(\delta_j^3 \cos x^4 - \delta_j^4 \sin x^4) + (\delta_j^1 \sin x^2 + \delta_j^2 \cos x^2)(\delta_i^3 \cos x^4 - \\
 & - \delta_i^4 \sin x^4)] + c_{33}e^{2x^3}(\delta_i^3 \cos x^4 - \delta_i^4 \sin x^4)(\delta_j^3 \cos x^4 - \delta_j^4 \sin x^4) + \\
 & + c_{14}e^{x^1+x^3}[(\delta_i^1 \cos x^2 - \delta_i^2 \sin x^2)(\delta_j^3 \sin x^4 + \delta_j^4 \cos x^4) + (\delta_j^1 \cos x^2 - \\
 & - \delta_j^2 \sin x^2)(\delta_i^3 \sin x^4 + \delta_i^4 \cos x^4)] + c_{24}e^{x^1+x^3}[(\delta_i^1 \sin x^2 + \\
 & + \delta_i^2 \cos x^2)(\delta_j^3 \sin x^4 + \delta_j^4 \cos x^4) + (\delta_j^1 \sin x^2 + \delta_j^2 \cos x^2)(\delta_i^3 \sin x^4 + \\
 & + \delta_i^4 \cos x^4)] + c_{34}e^{2x^3}[(\delta_i^3 \cos x^4 - \delta_i^4 \sin x^4)(\delta_j^3 \sin x^4 + \delta_j^4 \cos x^4) + \\
 & + (\delta_j^3 \cos x^4 - \delta_j^4 \sin x^4)(\delta_i^3 \sin x^4 + \delta_i^4 \cos x^4)] + \\
 & + c_{44}e^{2x^3}(\delta_i^3 \sin x^4 + \delta_i^4 \cos x^4)(\delta_j^3 \sin x^4 + \delta_j^4 \cos x^4)
 \end{aligned}$$

21. Presupunem $V_4 = V_3(x^1, x^2, x^3) \times E_1(x^4)$ și luăm pe V_3 ireductibil cu conexiunea contractată *nulă*; există trei cazuri. Luăm conexiunea $\Gamma_{jk}^i = \delta_3^i \delta_j^1 \delta_k^2 + \delta_3^i \delta_k^1 \delta_j^2$ și evident V_4 este global echivalent cu E_4 prin polinoame de gradul doi. Putem lua

$$u^1 = x^1, \quad u^2 = x^2, \quad u^3 = x^3 + x^1 x^2, \quad u^4 = x^4$$

de unde

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = \delta_i^2, \quad \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = \delta_i^3 + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1, \quad \frac{\partial u^4}{\partial x^i} = \delta_i^4$$

avem astfel

$$\begin{aligned}
 a_{ij} = & c_{11}\delta_i^1\delta_j^1 + c_{12}(\delta_i^1\delta_j^2 + \delta_j^1\delta_i^2) + c_{22}\delta_i^2\delta_j^2 + c_{13}[\delta_i^1(\delta_j^3 + \delta_j^1x^2 + \delta_j^2x^1) + \\
 & + \delta_j^1(\delta_i^3 + \delta_i^1x^2 + \delta_i^2x^1)] + c_{23}[\delta_i^2(\delta_j^3 + \delta_j^1x^2 + \delta_j^2x^1) + \delta_j^2(\delta_i^3 + \delta_i^1x^2 + \delta_i^2x^1)] + \\
 & + c_{33}(\delta_i^3 + \delta_i^1x^2 + \delta_i^2x^1)(\delta_j^3 + \delta_j^1x^2 + \delta_j^2x^1) + c_{14}(\delta_i^1\delta_j^4 + \delta_j^1\delta_i^4) + \\
 & + c_{24}(\delta_i^2\delta_j^4 + \delta_j^2\delta_i^4) + c_{34}[\delta_i^3(\delta_j^3 + \delta_j^1x^2 + \delta_j^2x^1) + \delta_j^3(\delta_i^3 + \delta_i^1x^2 + \delta_i^2x^1)] + c_{44}\delta_i^4\delta_j^4
 \end{aligned}$$

deci a_{ij} sînt polinoame de grad cel mult doi.

22. Să presupunem la fel $V_4 = V_3(x^1, x^2, x^3) \times E_1(x^4)$; V_3 ireductibil cu conexiune contractată *nulă*. Luăm $\Gamma_{jk}^i = \delta_3^i \delta_j^1 \delta_k^1 + \delta_3^i \delta_j^2 \delta_k^2$ deci V_4 este global echivalent cu E_4 prin polinoame de gradul doi. Putem lua :

$$u^1 = x^1, \quad u^2 = x^2, \quad u^3 = x^3 + \frac{1}{2} [(x^1)^2 + (x^2)^2], \quad u^4 = x^4$$

de unde:

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = \delta_i^2, \quad \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = \delta_i^3 + \delta_i^1 x^1 + \delta_i^2 x^2, \quad \frac{\partial u^4}{\partial x^i} = \delta_i^4$$

și deci avem:

$$\begin{aligned} a_{ij} = & c_{11} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{12} (\delta_i^1 \delta_j^2 + \delta_j^1 \delta_i^2) + c_{22} \delta_i^2 \delta_j^2 + c_{13} [\delta_i^1 (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^1 + \delta_j^2 x^2) + \\ & + \delta_j^1 (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^1 + \delta_i^2 x^2)] + c_{23} [\delta_i^2 (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^1 + \delta_j^2 x^2) + \delta_j^2 (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^1 + \delta_i^2 x^2)] + \\ & + c_{33} (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^1 + \delta_i^2 x^2) (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^1 + \delta_j^2 x^2) + c_{14} (\delta_i^1 \delta_j^4 + \delta_j^1 \delta_i^4) + \\ & + c_{24} (\delta_i^2 \delta_j^4 + \delta_j^2 \delta_i^4) + c_{34} [\delta_i^3 (\delta_j^4 + \delta_j^1 x^1 + \delta_j^2 x^2) + \delta_j^3 (\delta_i^4 + \delta_i^1 x^1 + \delta_i^2 x^2)] + c_{44} \delta_i^4 \delta_j^4 \end{aligned}$$

care sînt polinoame de grad cel mult doi.

23. Fie $V_4 = V_3(x^1, x^2, x^3) \times E_1(x^4)$ și V_3 ireductibil cu conexiunea contractată nulă. Luăm $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^3 = 1$ restul nuli; V_4 este echivalent global cu E_4 prin polinoame de gradul trei; putem lua:

$$u^1 = x^1, \quad u^2 = x^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2, \quad u^3 = x^3 + x^1 x^2 + \frac{1}{6} (x^1)^3, \quad u^4 = x^4$$

de unde

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = \delta_i^2 + \delta_i^1 x^1, \quad \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = \delta_i^3 + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1 + \frac{1}{2} \delta_i^1 (x^1)^2, \quad \frac{\partial u^4}{\partial x^i} = \delta_i^4$$

așa că

$$\begin{aligned} a_{ij} = & c_{11} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{12} [\delta_i^1 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) + \delta_j^1 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1)] + c_{22} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1) (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) + \\ & + c_{13} \left\{ \delta_i^1 [\delta_j^3 + \delta_j^1 x^2 + \delta_j^2 x^1 + \frac{1}{2} \delta_j^1 (x^1)^2] + \delta_j^1 [\delta_i^3 + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1 + \frac{1}{2} \delta_i^1 (x^1)^2] + \right. \\ & + c_{23} \left\{ (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1) [\delta_j^3 + \delta_j^1 x^2 + \delta_j^2 x^1 + \frac{1}{2} \delta_j^1 (x^1)^2] + (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) [\delta_i^3 + \delta_i^1 x^2 + \right. \\ & + \delta_i^2 x^1 + \frac{1}{2} \delta_i^1 (x^1)^2] \left. \right\} + c_{33} [\delta_i^3 + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1 + \frac{1}{2} \delta_i^1 (x^1)^2] [\delta_j^3 + \delta_j^1 x^2 + \delta_j^2 x^1 + \\ & + \frac{1}{2} \delta_j^1 (x^1)^2] + c_{14} (\delta_i^1 \delta_j^4 + \delta_j^1 \delta_i^4) + c_{24} [\delta_i^2 (\delta_j^4 + \delta_j^1 x^1) + \delta_j^2 (\delta_i^4 + \delta_i^1 x^1)] + \\ & + c_{34} \left\{ \delta_i^3 [\delta_j^4 + \delta_j^1 x^2 + \delta_j^2 x^1 + \frac{1}{2} \delta_j^1 (x^1)^2] + \right. \\ & + \delta_j^3 [\delta_i^4 + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1 + \frac{1}{2} \delta_i^1 (x^1)^2] \left. \right\} + c_{44} \delta_i^4 \delta_j^4 \end{aligned}$$

sînt polinoame de grad cel mult patru.

24. Considerăm $V_4 = V_3(x^1, x^2, x^3) \times V_1(x^4)$ și V_3 ireductibil cu conexiunea contractată nulă. Luăm $\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{44}^4 = 1$ restul nuli, iar $\Gamma_k = \delta_k^4$ și V_4 nu este echivalent global cu E_4 . Putem lua:

$$u^1 = x^1, \quad u^2 = x^2, \quad u^3 = x^3 + x^1 x^2, \quad u^4 = e^{x^4}$$

de unde

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = \delta_i^2, \quad \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = \delta_i^3 + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1, \quad \frac{\partial u^4}{\partial x^i} = e^{x^4} \delta_i^4$$

avem :

$$\begin{aligned} a_{ij} = & c_{11} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{12} (\delta_i^1 \delta_j^2 + \delta_j^1 \delta_i^2) + c_{22} \delta_i^2 \delta_j^2 + c_{13} [\delta_i^1 (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^2 + \delta_j^2 x^1) + \\ & + \delta_j^1 (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1)] + c_{23} [\delta_i^2 (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^2 + \delta_j^2 x^1) + \delta_j^2 (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1)] + \\ & + c_{33} (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1) (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^2 + \delta_j^2 x^1) + c_{14} e^{x^4} (\delta_i^1 \delta_j^4 + \delta_j^1 \delta_i^4) + \\ & + c_{24} e^{x^4} (\delta_i^2 \delta_j^4 + \delta_j^2 \delta_i^4) + c_{34} e^{x^4} [\delta_i^3 (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^2 + \delta_j^2 x^1) + \\ & + \delta_j^3 (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1)] + c_{44} e^{2x^4} \delta_i^4 \delta_j^4 \end{aligned}$$

25. Considerăm $V_4 = V_3(x^1, x^2, x^3) \times V_1(x^4)$ și V_3 ireductibil cu conexiunea contractată nulă. Avem $\Gamma_{11}^3 = \Gamma_{22}^3 = \Gamma_{44}^4 = 1$ restul nuli și $\Gamma_k = \delta_k^k$ deci V_4 nu este echivalent global cu E_4 . Putem lua

$$u^1 = x^1, \quad u^2 = x^2, \quad u^3 = x^3 + \frac{1}{2} [(x^1)^2 + (x^2)^2], \quad u^4 = e^{x^4}$$

de unde :

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = \delta_i^2, \quad \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = \delta_i^3 + \delta_i^1 x^1 + \delta_i^2 x^2, \quad \frac{\partial u^4}{\partial x^i} = e^{x^4} \delta_i^4$$

Avem :

$$\begin{aligned} a_{ij} = & c_{11} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{12} (\delta_i^1 \delta_j^2 + \delta_j^1 \delta_i^2) + c_{22} \delta_i^2 \delta_j^2 + c_{13} [\delta_i^1 (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^1 + \delta_j^2 x^2) + \\ & + \delta_j^1 (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^1 + \delta_i^2 x^2)] + c_{23} [\delta_i^2 (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^1 + \delta_j^2 x^2) + \delta_j^2 (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^1 + \delta_i^2 x^2)] + \\ & + c_{33} (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^1 + \delta_i^2 x^2) (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^1 + \delta_j^2 x^2) + c_{14} e^{x^4} (\delta_i^1 \delta_j^4 + \delta_j^1 \delta_i^4) + \\ & + c_{24} e^{x^4} (\delta_i^2 \delta_j^4 + \delta_j^2 \delta_i^4) + c_{34} e^{x^4} [\delta_i^3 (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^1 + \delta_j^2 x^2) + \\ & + \delta_j^3 (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^1 + \delta_i^2 x^2)] + c_{44} e^{2x^4} \delta_i^4 \delta_j^4 \end{aligned}$$

26. Fie $V_4 = V_3(x^1, x^2, x^3) \times V_1(x^4)$ și V_3 ireductibil cu conexiunea contractată nulă. Luăm $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{44}^4 = 1$ restul nuli. $\Gamma_k = \delta_k^k$ și V_4 nu este echivalent global cu E_4 . Putem lua :

$$u^1 = x^1, \quad u^2 = x^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2, \quad u^3 = x^3 + x^1 x^2 + \frac{1}{6} (x^1)^3, \quad u^4 = e^{x^4}$$

de unde

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = \delta_i^2 + \delta_i^1 x^1, \quad \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = \delta_i^3 + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1 + \frac{1}{2} \delta_i^1 (x^1)^2, \quad \frac{\partial u^4}{\partial x^i} = e^{x^4} \delta_i^4$$

Componentele tensorului fundamental sînt:

$$\begin{aligned} a_{ij} = & c_{11} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{12} [\delta_i^1 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) + \delta_j^1 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1)] + c_{22} (\delta_i^2 + \\ & + \delta_i^1 x^1) (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) + c_{13} \left\{ \delta_i^1 [\delta_j^3 + \delta_j^1 x^2 + \delta_j^2 x^1 + \frac{1}{2} \delta_j^1 (x^1)^2] + \right. \\ & + \delta_j^1 [\delta_i^3 + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1 + \frac{1}{2} \delta_i^1 (x^1)^2] \left. \right\} + c_{23} \left\{ (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1) [\delta_j^3 + \right. \\ & + \delta_j^1 x^2 + \delta_j^2 x^1 + \frac{1}{2} \delta_j^1 (x^1)^2] + (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) [\delta_i^3 + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1 + \\ & + \frac{1}{2} \delta_i^1 (x^1)^2] \left. \right\} + c_{33} [\delta_i^3 + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1 + \frac{1}{2} \delta_i^1 (x^1)^2] [\delta_j^3 + \delta_j^1 x^2 + \\ & + \delta_j^2 x^1 + \frac{1}{2} \delta_j^1 (x^1)^2] + c_{14} e^{x^4} (\delta_i^1 \delta_j^4 + \delta_j^1 \delta_i^4) + c_{24} e^{x^4} [\delta_i^4 \times \\ & \times (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) + \delta_j^4 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1)] + c_{34} e^{x^4} \left\{ \delta_i^4 [\delta_j^3 + \delta_j^1 x^2 + \delta_j^2 x^1 + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \delta_j^1 (x^1)^2] + \delta_j^4 [\delta_i^3 + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1 + \frac{1}{2} \delta_i^1 (x^1)^2] \right\} + c_{44} e^{2x^4} \delta_i^4 \delta_j^4 \end{aligned}$$

27. Considerăm $V_4 = V_3(x^1, x^2, x^3) \times E_1(x^4)$ și V_3 cu conexiunea contractată *nenulă*; avem două cazuri. Luăm $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = 1$ restul nuli și $\Gamma_k = 3\delta_k^1$ deci V_4 nu e global echivalent cu E_4 .
Putem lua:

$$u^1 = e^{x^1}, \quad u^2 = x^2 e^{x^1}, \quad u^3 = x^3 e^{x^1}, \quad u^4 = x^4$$

și prin derivare

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = e^{x^1} \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = e^{x^1} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2), \quad \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = e^{x^1} (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^3), \quad \frac{\partial u^4}{\partial x^i} = \delta_i^4$$

Obținem:

$$\begin{aligned} a_{ij} = & c_{11} e^{2x^1} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{12} e^{2x^1} [\delta_i^1 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + \delta_j^1 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2)] + \\ & + c_{22} e^{2x^1} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2) (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + c_{13} e^{2x^1} [\delta_i^1 (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^3) + \delta_j^1 (\delta_i^3 + \\ & + \delta_i^1 x^3)] + c_{23} e^{2x^1} [(\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2) (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^3) + (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) (\delta_i^3 + \\ & + \delta_i^1 x^3)] + c_{33} e^{2x^1} (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^3) (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^3) + c_{14} e^{x^1} (\delta_i^1 \delta_j^4 + \delta_j^1 \delta_i^4) + \\ & + c_{24} e^{x^1} [\delta_i^4 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + \delta_j^4 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2)] + c_{34} e^{x^1} [\delta_i^4 (\delta_j^3 + \\ & + \delta_j^1 x^3) + \delta_j^4 (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^3)] + c_{44} \delta_i^4 \delta_j^4 \end{aligned}$$

28. Presupunem $V_4 = V_3(x^1, x^2, x^3) \times E_1(x^4)$ și V_3 cu conexiunea contractată *nenulă*. Luăm $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{22}^2 = 1$ restul nuli și $\Gamma_k = 3\delta_k^1$. V_4 nu este global echivalent cu E_4 . Putem lua

$$u^1 = e^{x^1}, \quad u^2 = x^2 e^{x^1}, \quad u^3 = \left[x^3 + \frac{1}{2} (x^2)^2 \right] e^{x^1}, \quad u^4 = x^4$$

Prin derivare obținem:

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = e^{x^1} \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = e^{x^1} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2), \quad \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = e^{x^1} \left\{ \delta_i^3 + \delta_i^2 x^2 + \delta_i^1 \left[x^3 + \frac{1}{2} (x^2)^2 \right] \right\}, \quad \frac{\partial u^4}{\partial x^i} = \delta_i^4$$

Componentele tensorului fundamental sînt:

$$\begin{aligned} a_{ij} = & c_{11} e^{2x^1} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{12} e^{2x^1} [\delta_i^1 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + \delta_j^1 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2)] + \\ & + c_{22} e^{2x^1} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2) (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + c_{13} e^{2x^1} \left\{ \delta_i^1 \left[\delta_j^3 + \delta_j^2 x^2 + \delta_j^1 \left(x^3 + \frac{1}{2} (x^2)^2 \right) \right] + \right. \\ & + \delta_j^1 \left[\delta_i^3 + \delta_i^2 x^2 + \delta_i^1 \left(x^3 + \frac{1}{2} (x^2)^2 \right) \right] \left. \right\} + c_{23} e^{2x^1} \left\{ (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2) \left[\delta_j^3 + \delta_j^2 x^2 + \delta_j^1 \left(x^3 + \frac{1}{2} (x^2)^2 \right) \right] + \right. \\ & + (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) \left[\delta_i^3 + \delta_i^2 x^2 + \delta_i^1 \left(x^3 + \frac{1}{2} (x^2)^2 \right) \right] \left. \right\} + c_{33} e^{2x^1} \left\{ \delta_i^3 + \delta_i^2 x^2 + \delta_i^1 \left[x^3 + \frac{1}{2} (x^2)^2 \right] \right\} \left\{ \delta_j^3 + \delta_j^2 x^2 + \delta_j^1 \left[x^3 + \frac{1}{2} (x^2)^2 \right] \right\} + \\ & + c_{14} e^{x^1} (\delta_i^1 \delta_j^4 + \delta_j^1 \delta_i^4) + c_{24} e^{x^1} [\delta_i^1 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + \delta_j^1 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2)] + c_{34} e^{x^1} \left\{ \delta_i^1 \left[\delta_j^3 + \delta_j^2 x^2 + \delta_j^1 \left(x^3 + \frac{1}{2} (x^2)^2 \right) \right] + \right. \\ & + \delta_j^1 \left[\delta_i^3 + \delta_i^2 x^2 + \delta_i^1 \left(x^3 + \frac{1}{2} (x^2)^2 \right) \right] \left. \right\} + c_{44} \delta_i^4 \delta_j^4. \end{aligned}$$

29. Considerăm $V_4 = V_3(x^1, x^2, x^3) \times V_1(x^4)$ și V_3 cu conexiunea contractată *nenulă*. Luăm $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{44}^4 = 1$ restul nuli. $\Gamma = \delta_k^4 + 3\delta_k^1$ și V_4 nu este global echivalent cu E_4 . Putem lua:

$$u^1 = e^{x^1}, \quad u^2 = x^2 e^{x^1}, \quad u^3 = x^3 e^{x^1}, \quad u^4 = e^{x^4}$$

Prin derivare avem

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = e^{x^1} \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = e^{x^1} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2), \quad \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = e^{x^1} (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^3), \quad \frac{\partial u^4}{\partial x^i} = e^{x^4} \delta_i^4$$

Avem:

$$\begin{aligned} a_{ij} = & c_{11} e^{2x^1} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{12} e^{2x^1} [\delta_i^1 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + \delta_j^1 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2)] + c_{22} e^{2x^1} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2) (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + \\ & + c_{13} e^{2x^1} [\delta_i^1 (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^3) + \delta_j^1 (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^3)] + c_{23} e^{2x^1} [(\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2) (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^3) + (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^3)] + \\ & + c_{33} e^{2x^1} (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^3) (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^3) + c_{14} e^{x^1+x^4} (\delta_i^1 \delta_j^4 + \delta_j^1 \delta_i^4) + \\ & + c_{24} e^{x^1+x^4} [\delta_i^1 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + \delta_j^1 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2)] + c_{34} e^{x^1+x^4} [\delta_i^1 (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^3) + \delta_j^1 (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^3)] + c_{44} e^{2x^4} \delta_i^4 \delta_j^4. \end{aligned}$$

30. Presupunem $V_4 = V_3(x^1, x^2, x^3) \times V_1(x^4)$ și V_3 cu conexiunea contractată *nenulă*. Luăm $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{22}^3 = \Gamma_{44}^4 = 1$ restul nuli. $\Gamma_k = 3\delta_k^1 + \delta_k^4$ și V_4 nu este echivalent global cu E_4 . Putem lua:

$$u^1 = e^{x^1}, \quad u^2 = x^2 e^{x^1}, \quad u^3 = \left[x^3 + \frac{1}{2} (x^2)^2 \right] e^{x^1}, \quad u^4 = e^{x^4}$$

Prin derivare obținem:

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = e^{x^1} \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = e^{x^1} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2), \quad \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = e^{x^1} \left[\delta_i^3 + \delta_i^2 x^2 + \delta_i^1 \left(x^3 + \frac{1}{2} (x^2)^2 \right) \right], \quad \frac{\partial u^4}{\partial x^i} = e^{x^4} \delta_i^4.$$

Componentele tensorului fundamental sînt:

$$\begin{aligned} a_{ij} = & c_{11} e^{2x^1} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{12} e^{2x^1} [\delta_i^1 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + \delta_j^1 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2)] + c_{22} e^{2x^1} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2) (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + \\ & c_{13} e^{2x^1} \left\{ \delta_i^1 \left[\delta_j^3 + \delta_j^2 x^2 + \delta_j^1 \left(x^3 + \frac{1}{2} (x^2)^2 \right) \right] + \right. \\ & \left. + \delta_j^1 \left[\delta_i^3 + \delta_i^2 x^2 + \delta_i^1 \left(x^3 + \frac{1}{2} (x^2)^2 \right) \right] \right\} + c_{23} e^{2x^1} \left\{ (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2) \left[\delta_j^3 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \delta_j^2 x^2 + \delta_j^1 \left(x^3 + \frac{1}{2} (x^2)^2 \right) \right] + (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) \left[\delta_i^3 + \delta_i^2 x^2 + \delta_i^1 \left(x^3 + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} (x^2)^2 \right) \right] \right\} + c_{33} e^{2x^1} \left[\delta_i^3 + \delta_i^2 x^2 + \delta_i^1 \left(x^3 + \frac{1}{2} (x^2)^2 \right) \right] \left[\delta_j^3 + \delta_j^2 x^2 + \right. \\ & \left. + \delta_j^1 \left(x^3 + \frac{1}{2} (x^2)^2 \right) \right] + c_{14} e^{x^1 + x^4} (\delta_i^1 \delta_j^4 + \delta_j^1 \delta_i^4) + c_{24} e^{x^1 + x^4} [\delta_i^1 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + \\ & + \delta_j^1 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2)] + c_{34} e^{x^1 + x^4} \left\{ \delta_i^1 \left[\delta_j^3 + \delta_j^2 x^2 + \delta_j^1 \left(x^3 + \frac{1}{2} (x^2)^2 \right) \right] + \right. \\ & \left. + \delta_j^1 \left[\delta_i^3 + \delta_i^2 x^2 + \delta_i^1 \left(x^3 + \frac{1}{2} (x^2)^2 \right) \right] \right\} + c_{44} e^{2x^4} \delta_i^4 \delta_j^4. \end{aligned}$$

31. Presupunem V_4 ireductibil cu conexiunea contractată *nenulă*; ele se obțin adunînd spațiului $V_3(x^1, x^2, x^3)$ reductibil și ireductibil cu conexiunea contractată nulă o „unitate”. Luînd pe V_3 cu conexiune nulă avem pentru V_4 conexiunea:

$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{14}^4 = 1$ restul nuli, și $\Gamma_k = 4\delta_k^1$ deci V_4 nu e global echivalent cu E_4 . Putem lua:

$$u^1 = e^{x^1}, \quad u^\alpha = x^\alpha e^{x^1}, \quad (\alpha = 2, 3, 4)$$

de unde

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = e^{x^1} \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} = e^{x^1} (\delta_i^\alpha + \delta_i^1 x^\alpha)$$

Avem astfel:

$$a_{ij} = e^{2x^1} \{ c_{11} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{1\beta} [\delta_i^1 (\delta_j^\beta + \delta_j^1 x^\beta) + \delta_j^1 (\delta_i^\beta + \delta_i^1 x^\beta)] + \\ + c_{\alpha\beta} (\delta_i^\alpha + \delta_i^1 x^\alpha) (\delta_j^\beta + \delta_j^1 x^\beta) \}$$

32. Considerăm V_4 ireductibil cu conexiunea contractată *nenulă*; luînd pe V_3 reductibil în $E_1(x^2)$ și $V_2(x^3, x^4)$ iar V_2 să aibă conexiunea contractată nulă, prin adăugarea la V_3 a „unității“ obținem pentru V_4 conexiunea: $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{14}^4 = \Gamma_{33}^4 = 1$ restul nuli. Deoarece avem $\Gamma_k = 4\delta_k^1$, V_4 nu este evident global echivalent cu E_4 și putem lua:

$$u^1 = e^{x^1}, u^2 = x^2 e^{x^1}, u^3 = x^3 e^{x^1}, u^4 = \left[x^4 + \frac{1}{2} (x^3)^2 \right] e^{x^1}$$

de unde

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = e^{x^1} \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = e^{x^1} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2), \quad \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = e^{x^1} (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^3) \\ \frac{\partial u^4}{\partial x^i} = e^{x^1} \left\{ \delta_i^4 + \delta_i^3 x^3 + \delta_i^1 \left[x^4 + \frac{1}{2} (x^3)^2 \right] \right\}$$

și componentele tensorului fundamental sînt:

$$a_{ij} = c_{11} e^{2x^1} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{12} e^{2x^1} [\delta_i^1 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + \delta_j^1 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2)] + \\ + c_{22} e^{2x^1} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2) (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + c_{13} e^{2x^1} [\delta_i^1 (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^3) + \delta_j^1 (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^3)] + \\ + c_{23} e^{2x^1} [(\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2) (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^3) + (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^3)] + \\ + c_{33} e^{2x^1} (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^3) (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^3) + c_{14} e^{2x^1} \left\{ \delta_i^1 \left[\delta_j^4 + \delta_j^3 x^3 + \delta_j^1 \left(x^4 + \frac{1}{2} (x^3)^2 \right) \right] + \right. \\ \left. + \delta_j^1 \left[\delta_i^4 + \delta_i^3 x^3 + \delta_i^1 \left(x^4 + \frac{1}{2} (x^3)^2 \right) \right] \right\} + c_{24} e^{2x^1} \left\{ (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2) \left[\delta_j^4 + \delta_j^3 x^3 + \delta_j^1 \left(x^4 + \frac{1}{2} (x^3)^2 \right) \right] + \right. \\ \left. + \delta_j^1 \left(x^4 + \frac{1}{2} (x^3)^2 \right) \right\} + c_{34} e^{2x^1} \left\{ (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^3) \left[\delta_j^4 + \delta_j^3 x^3 + \delta_j^1 \left(x^4 + \frac{1}{2} (x^3)^2 \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (x^3)^2 \right\} + (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^3) \left[\delta_i^4 + \delta_i^3 x^3 + \delta_i^1 \left(x^4 + \frac{1}{2} (x^3)^2 \right) \right] \right\} + c_{44} e^{2x^1} \left\{ \delta_i^4 + \delta_i^3 x^3 + \delta_i^1 \left[x^4 + \frac{1}{2} (x^3)^2 \right] \right\} \left\{ \delta_j^4 + \delta_j^3 x^3 + \delta_j^1 \left[x^4 + \frac{1}{2} (x^3)^2 \right] \right\}$$

3. Fie V_4 ireductibil cu conexiune contractată *nenulă* obținut din V_3 ireductibil cu conexiunea contractată nulă adăugînd „unitatea“. Avem conexiunea: $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{14}^4 = \Gamma_{23}^4 = 1$ restul nuli. Pentru conexiunea contractată avem $\Gamma_k = 4\delta_k^1$ deci V_4 nu e global echivalent cu E_4 . Putem lua:

$$u^1 = e^{x^1}, u^2 = x^2 e^{x^1}, u^3 = x^3 e^{x^1}, u^4 = [x^4 + x^2 x^3] e^{x^1}$$

de unde

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = e^{x^1} \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = e^{x^1} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2), \quad \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = e^{x^1} (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^3)$$

$$\frac{\partial u^4}{\partial x^i} = e^{x^1} [\delta_i^4 + \delta_i^2 x^3 + \delta_i^3 x^2 + \delta_i^1 (x^4 + x^2 x^3)]$$

iar componentele tensorului fundamental sînt:

$$a_{ij} = c_{11} e^{2x^1} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{12} e^{2x^1} [\delta_i^1 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + \delta_j^1 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2)] +$$

$$c_{22} e^{2x^1} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2) (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + c_{13} e^{2x^1} [\delta_i^1 (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^3) + \delta_j^1 (\delta_i^3 +$$

$$+ \delta_i^1 x^3)] + c_{23} e^{2x^1} [(\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2) (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^3) + (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) (\delta_i^3 +$$

$$+ \delta_i^1 x^3)] + c_{33} e^{2x^1} (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^3) (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^3) + c_{14} e^{2x^1} \{ \delta_i^1 [\delta_j^4 + \delta_j^2 x^3 +$$

$$+ \delta_j^3 x^2 + \delta_j^1 (x^4 + x^2 x^3)] + \delta_j^1 [\delta_i^4 + \delta_i^2 x^3 + \delta_i^3 x^2 + \delta_i^1 (x^4 + x^2 x^3)] \} +$$

$$+ c_{24} e^{2x^1} \{ (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2) [\delta_j^4 + \delta_j^2 x^3 + \delta_j^3 x^2 + \delta_j^1 (x^4 + x^2 x^3)] + (\delta_j^2 +$$

$$+ \delta_j^1 x^2) [\delta_i^4 + \delta_i^2 x^3 + \delta_i^3 x^2 + \delta_i^1 (x^4 + x^2 x^3)] \} + c_{34} e^{2x^1} \{ (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^3) [\delta_j^4 + \delta_j^2 x^3 +$$

$$+ \delta_j^3 x^2 + \delta_j^1 (x^4 + x^2 x^3)] + (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^3) [\delta_i^4 + \delta_i^2 x^3 + \delta_i^3 x^2 + \delta_i^1 (x^4 + x^2 x^3)] \} +$$

$$+ c_{44} e^{2x^1} [\delta_i^4 + \delta_i^2 x^3 + \delta_i^3 x^2 + \delta_i^1 (x^4 + x^2 x^3)] [\delta_j^4 + \delta_j^2 x^3 + \delta_j^3 x^2 + \delta_j^1 (x^4 + x^2 x^3)]$$

34. Considerăm V_4 ireductibil cu conexiunea contractată *nenulă* obținut din V_3 ireductibil cu conexiunea contractată nulă adăugînd „unitatea”. Avem conexiunea:

$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{14}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{33}^1 = 1$ restul nuli. $\Gamma_k = 4\delta_k^1$ deci V_4 nu e echivalent global cu E_4 . Luăm:

$$u^1 = e^{x^1}, \quad u^2 = x^2 e^{x^1}, \quad u^3 = x^3 e^{x^1}, \quad u^4 = \left\{ x^4 + \frac{1}{2} [(x^2)^2 + (x^3)^2] \right\} e^{x^1}$$

de unde

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = e^{x^1} \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = e^{x^1} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2), \quad \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = e^{x^1} (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^3)$$

$$\frac{\partial u^4}{\partial x^i} = e^{x^1} \left\{ \delta_i^4 + \delta_i^2 x^2 + \delta_i^3 x^3 + \delta_i^1 \left[x^4 + \frac{1}{2} ((x^2)^2 + (x^3)^2) \right] \right\}$$

Avem:

$$a_{ij} = c_{11} e^{2x^1} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{12} e^{2x^1} [\delta_i^1 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + \delta_j^1 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2)] + c_{22} e^{2x^1} (\delta_i^2 +$$

$$+ \delta_i^1 x^2) (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + c_{13} e^{2x^1} [\delta_i^1 (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^3) + \delta_j^1 (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^3)] +$$

$$+ c_{23} e^{2x^1} [(\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2) (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^3) + (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^3)] +$$

$$+ c_{33} e^{2x^1} (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^3) (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^3) + c_{14} e^{2x^1} \left\{ \delta_i^1 [\delta_j^4 + \delta_j^2 x^2 + \delta_j^3 x^3 +$$

$$\begin{aligned}
& + \delta_j^1 \left(x^4 + \frac{1}{2} ((x^2)^2 + (x^3)^2) \right) \Big] + \delta_i^1 \left[\delta_i^4 + \delta_i^2 x^2 + \delta_i^3 x^3 + \delta_i^1 \left(x^4 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} ((x^2)^2 + (x^3)^2) \right) \right] + c_{24} e^{2x^1} \left\{ (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2) \left[\delta_j^4 + \delta_j^2 x^2 + \delta_j^3 x^3 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \delta_j^1 \left(x^4 + \frac{1}{2} ((x^2)^2 + (x^3)^2) \right) \right] + (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) \left[\delta_i^4 + \delta_i^2 x^2 + \delta_i^3 x^3 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \delta_i^1 \left(x^4 + \frac{1}{2} ((x^2)^2 + (x^3)^2) \right) \right] \right\} + c_{34} e^{2x^1} \left\{ (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^3) \left[\delta_j^4 + \delta_j^2 x^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \delta_j^3 x^3 + \delta_j^1 \left(x^4 + \frac{1}{2} ((x^2)^2 + (x^3)^2) \right) \right] + (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^3) \left[\delta_i^4 + \delta_i^2 x^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \delta_i^3 x^3 + \delta_i^1 \left(x^4 + \frac{1}{2} ((x^2)^2 + (x^3)^2) \right) \right] \right\} + c_{44} e^{2x^1} \left\{ \delta_i^4 + \delta_i^2 x^2 + \delta_i^3 x^3 + \right. \\
& \left. + \delta_i^1 \left[x^4 + \frac{1}{2} ((x^2)^2 + (x^3)^2) \right] \right\} \left\{ \delta_j^4 + \delta_j^2 x^2 + \delta_j^3 x^3 + \delta_j^1 \left[x^4 + \frac{1}{2} ((x^2)^2 + (x^3)^2) \right] \right\}
\end{aligned}$$

35. Fie V_4 ireductibil cu conexiunea contractată *nenulă* obținut din V_3 ireductibil cu conexiunea contractată nulă adjungînd „unitatea”; avem conexiunea: $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{14}^4 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{24}^4 = 1$ restul nuli. Conexiunea contractată fiind $\Gamma_k^k = 4 \delta_k^k V_4$ nu este global echivalent cu E_4 și putem lua formulele ce realizează aplicația lui V_4 pe E_4 sub forma:

$$u^1 = e^{x^1}, \quad u^2 = x^2 e^{x^1}, \quad u^3 = \left[x^3 + \frac{1}{2} (x^2)^2 \right] e^{x^1},$$

$$u^4 = \left[x^4 + x^2 x^3 + \frac{1}{6} (x^2)^3 \right] e^{x^1}$$

de unde

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = e^{x^1} \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = e^{x^1} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2), \quad \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = \left[\delta_i^3 + \delta_i^2 x^2 + \delta_i^1 \left(x^3 + \frac{1}{2} (x^2)^2 \right) \right] e^{x^1}$$

$$\frac{\partial u^4}{\partial x^i} = \left[\delta_i^4 + \delta_i^3 x^3 + \delta_i^2 x^2 + \frac{1}{2} \delta_i^2 (x^2)^2 + \delta_i^1 \left(x^4 + x^2 x^3 + \frac{1}{6} (x^2)^3 \right) \right] e^{x^1}$$

Avem deci

$$\begin{aligned}
a_{ij} = & c_{11} e^{2x^1} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{12} e^{2x^1} [\delta_i^1 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + \delta_j^1 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2)] + c_{22} e^{2x^1} (\delta_i^2 + \\
& + \delta_i^1 x^2) (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) + c_{13} e^{2x^1} \left\{ \delta_i^1 \left[\delta_j^3 + \delta_j^2 x^2 + \delta_j^1 \left(x^3 + \frac{1}{2} (x^2)^2 \right) \right] + \right. \\
& + \delta_j^1 \left[\delta_i^3 + \delta_i^2 x^2 + \delta_i^1 \left(x^3 + \frac{1}{2} (x^2)^2 \right) \right] \right\} + c_{23} e^{2x^1} \left\{ (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2) \left[\delta_j^3 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \delta_j^2 x^2 + \delta_j^1 \left(x^3 + \frac{1}{2} (x^2)^2 \right) \right] + (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) \left[\delta_i^3 + \delta_i^2 x^2 + \delta_i^1 \left(x^3 + \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} (x^2)^2 \Big] \Big\} + c_{33} e^{2x^1} \Big[\delta_i^3 + \delta_i^2 x^2 + \delta_i^1 \Big(x^3 + \frac{1}{2} (x^2)^2 \Big) \Big] \Big[\delta_j^3 + \delta_j^2 x^2 + \\
& + \delta_j^1 \Big(x^3 + \frac{1}{2} (x^2)^2 \Big) \Big] + c_{14} e^{x^1} \Big\{ \delta_i^1 \Big[\delta_j^4 + \delta_j^2 x^3 + \delta_j^3 x^2 + \frac{1}{2} \delta_j^2 (x^2)^2 + \\
& + \delta_j^1 \Big(x^4 + x^2 x^3 + \frac{1}{6} (x^2)^3 \Big) \Big] + \delta_j^1 \Big[\delta_i^4 + \delta_i^2 x^3 + \delta_i^3 x^2 + \frac{1}{2} \delta_i^2 (x^2)^2 + \\
& + \delta_i^1 \Big(x^4 + x^2 x^3 + \frac{1}{6} (x^2)^3 \Big) \Big] \Big\} + c_{24} e^{2x^1} \Big\{ (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^2) \Big[\delta_j^4 + \delta_j^2 x^3 + \delta_j^3 x^2 + \\
& + \frac{1}{2} \delta_j^2 (x^2)^2 + \delta_j^1 \Big(x^4 + x^2 x^3 + \frac{1}{6} (x^2)^3 \Big) \Big] + (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^2) \Big[\delta_i^4 + \delta_i^2 x^3 + \\
& + \delta_i^3 x^2 + \frac{1}{2} \delta_i^2 (x^2)^2 + \delta_i^1 \Big(x^4 + x^2 x^3 + \frac{1}{6} (x^2)^3 \Big) \Big] \Big\} + c_{34} e^{2x^1} \Big\{ \Big[\delta_i^3 + \delta_i^2 x^2 + \\
& + \delta_i^1 \Big(x^3 + \frac{1}{2} (x^2)^2 \Big) \Big] \Big[\delta_j^4 + \delta_j^2 x^3 + \delta_j^3 x^2 + \frac{1}{2} \delta_j^2 (x^2)^2 + \delta_j^1 \Big(x^4 + x^2 x^3 + \\
& + \frac{1}{6} (x^2)^3 \Big) \Big] + \Big[\delta_j^3 + \delta_j^2 x^2 + \delta_j^1 \Big(x^3 + \frac{1}{2} (x^2)^2 \Big) \Big] \Big[\delta_i^4 + \delta_i^2 x^3 + \delta_i^3 x^2 + \\
& + \frac{1}{2} \delta_i^2 (x^2)^2 + \delta_i^1 \Big(x^4 + x^2 x^3 + \frac{1}{6} (x^2)^3 \Big) \Big] \Big\} + c_{44} e^{2x^1} \Big[\delta_i^4 + \delta_i^2 x^3 + \delta_i^3 x^2 + \\
& + \frac{1}{2} \delta_i^2 (x^2)^2 + \delta_i^1 \Big(x^4 + x^2 x^3 + \frac{1}{6} (x^2)^3 \Big) \Big] \Big[\delta_j^4 + \delta_j^2 x^3 + \delta_j^3 x^2 + \frac{1}{2} \delta_j^2 (x^2)^2 + \\
& + \delta_j^1 \Big(x^4 + x^2 x^3 + \frac{1}{6} (x^2)^3 \Big) \Big] \Big\}.
\end{aligned}$$

36. Determinăm V_4 ireductibil cu conexiunea contractată nenulă prin complexificarea unui V_2 ireductibil cu conexiune contractată nenulă. Utilizăm algebrele asociate. Fie e_1, e_3 unitățile algebrei de ordinul doi comutativă asociativă cu legea de înmulțire:

$$e_1 e_1 = e_1, \quad e_1 e_3 = e_3, \quad e_3 e_3 = 0$$

și considerînd algebra de ordinul patru cu unitățile $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ obținute prin complexificare după formulele

$$\eta_1 = e_1, \quad \eta_2 = e_3, \quad \eta_3 = ie_1, \quad \eta_4 = ie_3$$

și obținem legea de înmulțire

$$\begin{aligned}
\eta_1 \eta_1 &= \eta_1 & \eta_2 \eta_2 &= 0 & \eta_3 \eta_3 &= -\eta_1 & \eta_4 \eta_4 &= 0 \\
\eta_1 \eta_2 &= \eta_2 & \eta_2 \eta_3 &= \eta_4 & \eta_3 \eta_4 &= -\eta_2 \\
\eta_1 \eta_3 &= \eta_3 & \eta_2 \eta_4 &= 0 \\
\eta_1 \eta_4 &= \eta_4
\end{aligned}$$

pe care citim conexiunea $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{14}^4 = \Gamma_{23}^4 = -\Gamma_{33}^1 = -\Gamma_{34}^2 = 1$ restul nuli și $\Gamma_k = 4\delta_k^1$ ce arată că V_4 nu este global echivalent cu E_4

Sistemul

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^k} - \Gamma_{jk}^i \frac{\partial u}{\partial x^i} = 0$$

se scrie punînd $\frac{\partial u}{\partial x^i} = u_i$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^k} = u_{jk}$ astfel

$$u_{11} = u_1 \quad u_{22} = 0 \quad u_{33} = -u_1 \quad u_{44} = 0$$

$$u_{12} = u_2 \quad u_{23} = u_4 \quad u_{34} = -u_2$$

$$u_{13} = u_3 \quad u_{24} = 0$$

$$u_{14} = u_4$$

a cărui integrală generală este :

$$u = \{a \cos x^3 + b \sin x^3 + [c \cos x^3 + d \sin x^3] x^2 + \\ + [d \cos x^3 - c \sin x^3] x^4\} e^{x^1} + e$$

unde a, b, c, d, e sînt constante. Putem lua :

$$u^1 = \cos x^3 \cdot e^{x^1}$$

$$u^2 = \sin x^3 \cdot e^{x^1}$$

$$u^3 = [x^2 \cos x^3 - x^4 \sin x^3] e^{x^1}$$

$$u^4 = [x^2 \sin x^3 + x^4 \cos x^3] e^{x^1}$$

Prin derivare avem

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = e^{x^1} (\delta_i^1 \cos x^3 - \delta_i^3 \sin x^3), \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = e^{x^1} (\delta_i^1 \sin x^3 + \delta_i^3 \cos x^3)$$

$$\frac{\partial u^3}{\partial x^i} = e^{x^1} [\delta_i^1 (x^2 \cos x^3 - x^4 \sin x^3) + \delta_i^2 \cos x^3 - \delta_i^4 \sin x^3 - \delta_i^3 x^2 \sin x^3 - \delta_i^3 x^4 \cos x^3]$$

$$\frac{\partial u^4}{\partial x^i} = e^{x^1} [\delta_i^1 (x^2 \sin x^3 + x^4 \cos x^3) + \delta_i^2 \sin x^3 + \delta_i^4 \cos x^3 + \delta_i^3 x^2 \cos x^3 - \delta_i^3 x^4 \sin x^3]$$

Avem deci :

$$a_{ij} = c_{11} e^{2x^1} [\delta_i^1 \cos x^3 - \delta_i^3 \sin x^3] [\delta_j^1 \cos x^3 - \delta_j^3 \sin x^3] + c_{12} e^{2x^1} [(\delta_i^1 \cos x^3 - \delta_i^3 \sin x^3) (\delta_j^1 \sin x^3 + \delta_j^3 \cos x^3) + (\delta_j^1 \cos x^3 - \delta_j^3 \sin x^3) (\delta_i^1 \sin x^3 + \delta_i^3 \cos x^3)] + \\ + c_{22} e^{2x^1} (\delta_i^1 \sin x^3 + \delta_i^3 \cos x^3) (\delta_j^1 \sin x^3 + \delta_j^3 \cos x^3) + c_{13} e^{2x^1} \{(\delta_i^1 \cos x^3 - \delta_i^3 \sin x^3) [\delta_j^1 (x^2 \cos x^3 - x^4 \sin x^3) + \delta_j^2 \cos x^3 - \delta_j^4 \sin x^3 - \delta_j^3 x^2 \sin x^3 - \delta_j^3 x^4 \cos x^3] + \\ + (\delta_j^1 \cos x^3 - \delta_j^3 \sin x^3) [\delta_i^1 (x^2 \cos x^3 - x^4 \sin x^3) + \delta_i^2 \cos x^3 - \delta_i^4 \sin x^3 - \delta_i^3 x^2 \sin x^3 - \delta_i^3 x^4 \cos x^3]\} + c_{23} e^{2x^1} \{(\delta_i^1 \sin x^3 + \delta_i^3 \cos x^3) [\delta_j^1 (x^2 \cos x^3 - x^4 \sin x^3) + \delta_j^2 \cos x^3 - \delta_j^4 \sin x^3 - \delta_j^3 x^2 \sin x^3 - \delta_j^3 x^4 \cos x^3] + \\ + (\delta_j^1 \sin x^3 + \delta_j^3 \cos x^3) \cdot [\delta_i^1 (x^2 \cos x^3 - x^4 \sin x^3) + \delta_i^2 \cos x^3 - \delta_i^4 \sin x^3 - \delta_i^3 x^2 \sin x^3 - \delta_i^3 x^4 \cos x^3]\}$$

$$\begin{aligned}
& \delta_i^3 x^4 \cos x^3 \} + c_{33} e^{2x^1} \{ \delta_i^1 (x^2 \cos x^3 - x^4 \sin x^3) + \delta_i^2 \cos x^3 - \delta_i^4 \sin x^3 - \delta_j^3 x^2 \sin x^3 - \\
& - \delta_i^3 x^4 \cos x^3 \} \cdot [\delta_j^1 (x^2 \cos x^3 - x^4 \sin x^3) + \delta_j^2 \cos x^3 - \delta_j^4 \sin x^3 - \delta_j^3 x^2 \sin x^3 - \\
& - \delta_j^3 x^4 \cos x^3] + c_{14} e^{2x^1} \{ (\delta_i^1 \cos x^3 - \delta_i^3 \sin x^3) [\delta_j^1 (x^2 \sin x^3 + x^4 \cos x^3) + \delta_j^2 \sin x^3 + \\
& + \delta_j^4 \cos x^3 + \delta_j^3 x^2 \cos x^3 - \delta_j^4 x^4 \sin x^3] + (\delta_j^1 \cos x^3 - \delta_j^3 \sin x^3) [\delta_i^1 (x^2 \sin x^3 + \\
& + x^4 \cos x^3) + \delta_i^2 \sin x^3 + \delta_i^4 \cos x^3 + \delta_i^3 x^2 \cos x^3 - \delta_i^4 x^4 \sin x^3] \} + c_{24} e^{2x^1} \{ (\delta_i^1 \sin x^3 + \\
& + \delta_i^3 \cos x^3) [\delta_j^1 (x^2 \sin x^3 + x^4 \cos x^3) + \delta_j^2 \sin x^3 + \delta_j^4 \cos x^3 + \delta_j^3 x^2 \cos x^3 - \\
& - \delta_j^4 x^4 \sin x^3] + (\delta_j^1 \sin x^3 + \delta_j^3 \cos x^3) [\delta_i^1 (x^2 \sin x^3 + x^4 \cos x^3) + \delta_i^2 \sin x^3 + \\
& + \delta_i^4 \cos x^3 + \delta_i^3 x^2 \cos x^3 - \delta_i^4 x^4 \sin x^3] \} + c_{34} e^{2x^1} \{ [\delta_i^1 (x^2 \cos x^3 - x^4 \sin x^3) + \\
& + \delta_i^2 \cos x^3 - \delta_i^4 \sin x^3 - \delta_i^3 x^2 \sin x^3 - \delta_i^3 x^4 \cos x^3] [\delta_j^1 (x^2 \sin x^3 + x^4 \cos x^3) + \\
& + \delta_j^2 \sin x^3 + \delta_j^4 \cos x^3 + \delta_j^3 x^2 \cos x^3 - \delta_j^4 x^4 \sin x^3] + [\delta_j^1 (x^2 \cos x^3 - x^4 \sin x^3) + \\
& + \delta_j^2 \cos x^3 - \delta_j^4 \sin x^3 - \delta_j^3 x^2 \sin x^3 - \delta_j^3 x^4 \cos x^3] [\delta_i^1 (x^2 \sin x^3 + x^4 \cos x^3) + \\
& + \delta_i^2 \sin x^3 + \delta_i^4 \cos x^3 + \delta_i^3 x^2 \cos x^3 - \delta_i^4 x^4 \sin x^3] \} + c_{44} e^{2x^1} [\delta_i^1 (x^2 \sin x^3 + \\
& + x^4 \cos x^3) + \delta_i^2 \sin x^3 + \delta_i^4 \cos x^3 + \delta_i^3 x^2 \cos x^3 - \delta_i^4 x^4 \sin x^3] [\delta_j^1 (x^2 \sin x^3 + \\
& + x^4 \cos x^3) + \delta_j^2 \sin x^3 + \delta_j^4 \cos x^3 + \delta_j^3 x^2 \cos x^3 - \delta_j^4 x^4 \sin x^3]
\end{aligned}$$

37. Pentru determinarea conexiunilor spațiilor V_4 ireductibile cu conexiune contractată nulă care sînt deci global echivalente cu E_4 utilizăm metoda expusă în [4], pornind de la toate conexiunile spațiilor V_3 reductibile și ireductibile cu conexiune contractată nulă. Presupunem conexiunea lui V_3 nulă; operatorii sînt

$$\begin{cases} X_\alpha = \partial_\alpha + p_{\alpha\beta}^4 \partial_4, & (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \\ X_4 = \partial_4. \end{cases}$$

Din anularea parantezelor lui Poisson rezultă relațiile: $p_{\alpha\beta}^4 = p_{\beta\alpha}^4$ și deci conexiunea lui V_4 este $\Gamma_{\alpha\beta}^4 = p_{\alpha\beta}^4$ restul nuli. Putem lua

$$u^\alpha = x^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

$$u_4 = x^4 + \frac{1}{2} p_{\alpha\beta}^4 x^\alpha x^\beta.$$

Efectuînd o transformare centroafină nedegenerată a variabilelor x^i putem aduce forma pătratică

$$\varphi_2(x^1, x^2, x^3) = p_{\alpha\beta}^4 x^\alpha x^\beta$$

la două forme canonice neechivalente afin care dau următoarele două spații V_4 .

$$a) \quad \Gamma_{11}^4 = \Gamma_{22}^4 = \Gamma_{33}^4 = 1 \text{ restul nuli}$$

deci avem

$$u^\alpha = x^\alpha (\alpha = 1, 2, 3) \quad u^4 = x^4 + \frac{1}{2} [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]$$

de unde

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} = \delta_i^\alpha, \quad \frac{\partial u^4}{\partial x^i} = \delta_i^4 + \delta_i^1 x^1 + \delta_i^2 x^2 + \delta_i^3 x^3$$

iar tensorul fundamental este:

$$a_{ij} = c_{\alpha\beta} \delta_i^\alpha \delta_j^\beta + c_{\alpha 4} [\delta_i^\alpha (\delta_j^4 + \delta_j^1 x^1 + \delta_j^2 x^2 + \delta_j^3 x^3) + \delta_j^\alpha (\delta_i^4 + \delta_i^1 x^1 + \delta_i^2 x^2 + \delta_i^3 x^3)] + c_{44} (\delta_i^4 + \delta_i^1 x^1 + \delta_i^2 x^2 + \delta_i^3 x^3) (\delta_j^4 + \delta_j^1 x^1 + \delta_j^2 x^2 + \delta_j^3 x^3)$$

care sînt polinoame de gradul cel mult doi.

A doua formă canonică a lui φ_2 ne conduce la conexiunea

$$b) \quad \Gamma_{11}^4 = \Gamma_{22}^4 = -\Gamma_{33}^4 = 1$$

restul nuli și avem:

$$u^\alpha = x^\alpha (\alpha = 1, 2, 3) \quad u^4 = x^4 + \frac{1}{2} [(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2]$$

prin derivare obținem:

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} = \delta_i^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad \frac{\partial u^4}{\partial x^i} = \delta_i^4 + \delta_i^1 x^1 + \delta_i^2 x^2 - \delta_i^3 x^3$$

Componentele tensorului fundamental sînt

$$a_{ij} = c_{\alpha\beta} \delta_i^\alpha \delta_j^\beta + c_{\alpha 4} [\delta_i^\alpha (\delta_j^4 + \delta_j^1 x^1 + \delta_j^2 x^2 - \delta_j^3 x^3) + \delta_j^\alpha (\delta_i^4 + \delta_i^1 x^1 + \delta_i^2 x^2 - \delta_i^3 x^3)] + c_{44} (\delta_i^4 + \delta_i^1 x^1 + \delta_i^2 x^2 - \delta_i^3 x^3) (\delta_j^4 + \delta_j^1 x^1 + \delta_j^2 x^2 - \delta_j^3 x^3)$$

care sînt polinoame de gradul doi.

38. Considerăm pe $V_3 = V^2(x^1, x^2) \times E_1(x^3)$, conexiunea lui V_2 fiind $\Gamma_{11}^2 = 1$ restul nuli. Operatorii atașați lui V_4 sînt:

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_1 + x^1 \partial_2 + p_{1j}^4 x^j \partial_4 \quad (j = 1, 2, 3) \\ X_2 &= \partial_2 + p_{2j}^4 x^j \partial_4 \\ X_3 &= \partial_3 + p_{3j}^4 x^j \partial_4 \\ X_4 &= \partial_4 \end{aligned}$$

Din condiția ca acești operatori să definească local un grup abelian, rezultă

$$p_{12}^4 = p_{21}^4, \quad p_{13}^4 = p_{31}^4, \quad p_{22}^4 = p_{23}^4 = p_{32}^4 = 0$$

Rămîn deci patru parametri nedeterminați. Conexiunea lui V_4 este

$$\Gamma_{11}^2 = 1, \quad \Gamma_{11}^4 = p_{11}^4, \quad \Gamma_{12}^4 = p_{12}^4 = p_{21}^4, \quad \Gamma_{13}^4 = p_{13}^4 = p_{31}^4, \quad \Gamma_{33}^4 = p_{33}^4$$

Luînd pentru sistemul

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^k} + \Gamma_{jk}^i \frac{\partial u}{\partial x^i} = 0$$

soluțiile liniar independente sub forma:

$$u^i = x^i + \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^i x^j x^k + \frac{1}{3!} \Gamma_{sj}^i \Gamma_{kl}^s x^j x^k x^l + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{p!} \Gamma_{s_1 k_1}^i \Gamma_{s_2 k_2}^{s_1} \dots \Gamma_{k_{p-1} l_{p-1}}^{s_{p-2}} x^{k_1} x^{k_2} \dots x^{k_p}$$

În cazul nostru devin:

$$u^1 = x^1$$

$$u^2 = x^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2$$

$$u^3 = x^3$$

$$u^4 = x^4 + \frac{1}{2} [p_{11}^4 (x^1)^2 + 2p_{12}^4 x^1 x^2 + 2p_{13}^4 x^1 x^3 + p_{33}^4 (x^3)^2] + \frac{1}{3!} p_{12}^4 (x^1)^3$$

Menționăm că prin transformări liniare putem aduce conexiunea la următoarele forme canonice:

a) $p_{12}^4 = 1$, $p_{33}^4 = 0$, $p_{11}^4 = 0$ în care caz avem:

$$u^1 = x^1, \quad u^2 = x^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2, \quad u^3 = x^3, \quad u^4 = x^4 + x^1 x^2$$

Prin derivare

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = \delta_i^2 + \delta_i^1 x^1, \quad \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = \delta_i^3, \quad \frac{\partial u^4}{\partial x^i} = \delta_i^4 + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1$$

de unde

$$a_{ij} = c_{11} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{12} [\delta_i^1 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) + \delta_j^1 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1)] + c_{22} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1) (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) +$$

$$+ c_{13} (\delta_i^1 \delta_j^3 + \delta_j^1 \delta_i^3) + c_{23} [\delta_i^3 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) + \delta_j^3 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1)] + c_{33} \delta_i^3 \delta_j^3 + c_{14} [\delta_i^2 (\delta_j^4 +$$

$$+ \delta_j^1 x^2 + \delta_j^2 x^1) + \delta_j^1 (\delta_i^4 + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1)] + c_{24} [(\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1) (\delta_j^4 + \delta_j^1 x^2 + \delta_j^2 x^1) +$$

$$+ (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) (\delta_i^4 + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1)] + c_{34} [\delta_i^3 (\delta_j^4 + \delta_j^1 x^2 + \delta_j^2 x^1) + \delta_j^3 (\delta_i^4 + \delta_i^1 x^2 +$$

$$+ \delta_i^2 x^1)] + c_{44} (\delta_i^4 + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1) (\delta_j^4 + \delta_j^1 x^2 + \delta_j^2 x^1)$$

care sînt polinoame de grad cel mult doi.

b) $p_{11}^4 = p_{12}^4 = 0$, $p_{13}^4 = 1$ ceea ce dă:

$$u^1 = x^1, \quad u^2 = x^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2, \quad u^3 = x^3, \quad u^4 = x^4 + x^1 x^3$$

de unde

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = \delta_i^1; \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = \delta_i^2 + \delta_i^1 x^1, \quad \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = \delta_i^3, \quad \frac{\partial u^4}{\partial x^i} = \delta_i^4 + \delta_i^1 x^3 + \delta_i^3 x^1$$

și componentele tensorului fundamental sînt

$$a_{ij} = c_{11}\delta_i^1\delta_j^1 + c_{12}[\delta_i^1(\delta_j^2 + \delta_j^1x^1) + \delta_j^1(\delta_i^2 + \delta_i^1x^1)] + c_{22}(\delta_i^2 + \delta_i^1x^1)(\delta_j^2 + \delta_j^1x^1) + \\ + c_{13}(\delta_i^1\delta_j^3 + \delta_j^1\delta_i^3) + c_{23}[\delta_i^3(\delta_j^2 + \delta_j^1x^1) + \delta_j^3(\delta_i^2 + \delta_i^1x^1)] + c_{33}\delta_i^3\delta_j^3 + c_{14}[\delta_i^1(\delta_j^4 + \\ + \delta_j^1x^3 + \delta_j^3x^1) + \delta_j^1(\delta_i^4 + \delta_i^1x^3 + \delta_i^3x^1)] + c_{24}[(\delta_i^2 + \delta_i^1x^1)(\delta_j^4 + \delta_j^1x^3 + \delta_j^3x^1) + \\ + (\delta_j^2 + \delta_j^1x^1)(\delta_i^4 + \delta_i^1x^3 + \delta_i^3x^1)] + c_{34}[\delta_i^3(\delta_j^4 + \delta_j^1x^3 + \delta_j^3x^1) + \delta_j^3(\delta_i^4 + \delta_i^1x^3 + \\ + \delta_i^3x^1)] + c_{44}(\delta_i^4 + \delta_i^1x^3 + \delta_i^3x^1)(\delta_j^4 + \delta_j^1x^3 + \delta_j^3x^1)$$

polinoame de grad cel mult doi.

c) $p_{13}^4 = 0$, $p_{33}^4 = 1$ ceilalți doi: p_{11}^4 și p_{12}^4 arbitrari, rezultă

$$u^1 = x^1, \quad u^2 = x^2 + \frac{1}{2}(x^1)^2, \quad u^3 = x^3$$

$$u^4 = x^4 + \frac{1}{2}[p_{11}^4(x^1)^2 + 2p_{12}^4x^1x^2 + (x^2)^2] + \frac{1}{3!}p_{12}^4(x^1)^3$$

Prin derivare

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = \delta_i^2 + \delta_i^1x^1, \quad \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = \delta_i^3$$

$$\frac{\partial u^4}{\partial x^i} = \delta_i^4 + p_{11}^4\delta_i^1x^1 + p_{12}^4(\delta_i^1x^2 + \delta_i^2x^1) + \delta_i^3x^3 + \frac{1}{2}p_{12}^4\delta_i^1(x^1)^2$$

deci

$$a_{ij} = c_{11}\delta_i^1\delta_j^1 + c_{12}[\delta_i^1(\delta_j^2 + \delta_j^1x^1) + \delta_j^1(\delta_i^2 + \delta_i^1x^1)] + c_{22}(\delta_i^2 + \delta_i^1x^1)(\delta_j^2 + \delta_j^1x^1) + \\ + c_{13}(\delta_i^1\delta_j^3 + \delta_j^1\delta_i^3) + c_{23}[\delta_i^3(\delta_j^2 + \delta_j^1x^1) + \delta_j^3(\delta_i^2 + \delta_i^1x^1)] + c_{33}\delta_i^3\delta_j^3 + c_{14}\left\{\delta_i^1[\delta_j^4 + \right. \\ \left. + p_{11}^4\delta_j^1x^1 + p_{12}^4(\delta_j^1x^2 + \delta_j^2x^1) + \delta_j^3x^3 + \frac{1}{2}p_{12}^4\delta_j^1(x^1)^2] + \delta_j^1[\delta_i^4 + p_{11}^4\delta_i^1x^1 + p_{12}^4(\delta_i^1x^2 + \right. \\ \left. + \delta_i^2x^1) + \delta_i^3x^3 + \frac{1}{2}p_{12}^4\delta_i^1(x^1)^2]\right\} + c_{24}\left\{(\delta_i^2 + \delta_i^1x^1)[\delta_j^4 + p_{11}^4\delta_j^1x^1 + p_{12}^4(\delta_j^1x^2 + \right. \\ \left. \delta_j^2x^1) + \delta_j^3x^3 + \frac{1}{2}p_{12}^4\delta_j^1(x^1)^2] + (\delta_j^2 + \delta_j^1x^1)[\delta_i^4 + p_{11}^4\delta_i^1x^1 + p_{12}^4(\delta_i^1x^2 + \delta_i^2x^1) + \right. \\ \left. + \delta_i^3x^3 + \frac{1}{2}p_{12}^4\delta_i^1(x^1)^2]\right\} + c_{34}\left\{\delta_i^3[\delta_j^4 + p_{11}^4\delta_j^1x^1 + p_{12}^4(\delta_j^1x^2 + \delta_j^2x^1) + \delta_j^3x^3 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}p_{12}^4\delta_j^1(x^1)^2] + \delta_j^3[\delta_i^4 + p_{11}^4\delta_i^1x^1 + p_{12}^4(\delta_i^1x^2 + \delta_i^2x^1) + \delta_i^3x^3 + \frac{1}{2}p_{12}^4\delta_i^1(x^1)^2]\right\} + \\ + c_{44}[\delta_i^4 + p_{11}^4\delta_i^1x^1 + p_{12}^4(\delta_i^1x^2 + \delta_i^2x^1) + \delta_i^3x^3 + \frac{1}{2}p_{12}^4\delta_i^1(x^1)^2][\delta_j^4 + p_{11}^4\delta_j^1x^1 + \\ + p_{12}^4(\delta_j^1x^2 + \delta_j^2x^1) + \delta_j^3x^3 + \frac{1}{2}p_{12}^4\delta_j^1(x^1)^2]$$

care sînt polinoame de grad cel mult patru.

39. Considerînd $V_3(x^1, x^2, x^3)$ ireductibil cu conexiunea $\Gamma_{12}^3 = 1$ restul nuli, operatorii atașați lui V_4 sînt:

$$X_1 = \partial_1 + x^2 \partial_3 + p_{1j}^4 x^j \partial_4 \quad (j = 1, 2, 3)$$

$$X_2 = \partial_2 + x^1 \partial_3 + p_{2j}^4 p^j x \partial_4$$

$$X_3 = \partial_3 + p_{3j}^4 x^j \partial_4$$

$$X_4 = \partial_4$$

și din condițiile ca ei să fie permutabili rezultă:

$$p_{12}^4 = p_{21}^4, \quad p_{23}^4 = p_{32}^4 = p_{13}^4 = p_{31}^4 = p_{33}^4 = 0$$

deci conexiunea este

$$\Gamma_{12}^3 = 1, \quad \Gamma_{11}^4 = p_{11}^4, \quad \Gamma_{12}^4 = p_{12}^4 = p_{21}^4, \quad \Gamma_{22}^4 = p_{22}^4$$

Putem lua

$$u^1 = x^1, \quad u^2 = x^2, \quad u^3 = x^3 + x^1 x^2,$$

$$u^4 = x^4 + \frac{1}{2} [p_{11}^4 (x^1)^2 + 2p_{12}^4 x^1 x^2 + p_{22}^4 (x^2)^2]$$

și considerînd a doua formă degenerată obținem cazurile:

a) $p_{11}^4 = -p_{12}^4 = p_{22}^4 = \lambda$, $\lambda \neq 0$ și putem lua:

$$u^1 = x^1, \quad u^2 = x^2, \quad u^3 = x^3 + x^1 x^2, \quad u^4 = x^4 + \frac{\lambda}{2} (x^1 - x^2)^2$$

din care deducem

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = \delta_i^2, \quad \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = \delta_i^3 + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1,$$

$$\frac{\partial u^4}{\partial x^i} = \delta_i^4 + \lambda \delta_i^1 (x^1 - x^2) - \lambda \delta_i^2 (x^1 - x^2)$$

Avem astfel:

$$\begin{aligned} a_{ij} = & c_{11} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{12} (\delta_i^1 \delta_j^2 + \delta_j^1 \delta_i^2) + c_{22} \delta_i^2 \delta_j^2 + c_{13} [\delta_i^1 (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^2 + \delta_j^2 x^1) + \delta_j^1 (\delta_i^3 + \\ & + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1)] + c_{23} [\delta_i^2 (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^2 + \delta_j^2 x^1) + \delta_j^2 (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1)] + c_{33} (\delta_i^3 + \\ & + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1) (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^2 + \delta_j^2 x^1) + c_{14} \{ \delta_i^1 [\delta_j^4 + \lambda \delta_j^1 (x^1 - x^2) - \lambda \delta_j^2 (x^1 - x^2)] + \\ & + \delta_j^1 [\delta_i^4 + \lambda \delta_i^1 (x^1 - x^2) - \lambda \delta_i^2 (x^1 - x^2)] \} + c_{24} \{ \delta_i^2 [\delta_j^4 + \lambda \delta_j^1 (x^1 - x^2) - \lambda \delta_j^2 (x^1 - \\ & - x^2)] + \delta_j^2 [\delta_i^4 + \lambda \delta_i^1 (x^1 - x^2) - \lambda \delta_i^2 (x^1 - x^2)] \} + c_{34} \{ (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1) [\delta_j^4 + \\ & + \lambda \delta_j^1 (x^1 - x^2) - \lambda \delta_j^2 (x^1 - x^2)] + (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^2 + \delta_j^2 x^1) [\delta_i^4 + \lambda \delta_i^1 (x^1 - x^2) - \\ & - \lambda \delta_i^2 (x^1 - x^2)] \} + c_{44} [\delta_i^4 + \lambda \delta_i^1 (x^1 - x^2) - \lambda \delta_i^2 (x^1 - x^2)] \cdot [\delta_j^4 + \lambda \delta_j^1 (x^1 - x^2) - \\ & - \lambda \delta_j^2 (x^1 - x^2)] \end{aligned}$$

care sînt polinoame de grad cel mult doi.

b) În acest caz forma pătratică e eliptică, putem avea forma canonică:

$$p_{11}^4 = p_{22}^4 = 1 \quad p_{12}^4 = 0 \text{ deci}$$

$$u^1 = x^1, \quad u^2 = x^2, \quad u^3 = x^3 + x^1 x^2, \quad u^4 = x^4 + \frac{1}{2} [(x^1)^2 + (x^2)^2]$$

de unde

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = \delta_i^2, \quad \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = \delta_i^3 + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1, \quad \frac{\partial u^4}{\partial x^i} = \delta_i^4 + \delta_i^1 x^1 + \delta_i^2 x^2$$

Avem

$$\begin{aligned} a_{ij} = & c_{11} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{12} (\delta_i^1 \delta_j^2 + \delta_j^1 \delta_i^2) + c_{22} \delta_i^2 \delta_j^2 + c_{13} [\delta_i^1 (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^2 + \delta_j^2 x^1) + \delta_j^1 (\delta_i^3 + \\ & + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1)] + c_{23} [\delta_i^2 (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^2 + \delta_j^2 x^1) + \delta_j^2 (\delta_i^3 + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1)] + c_{33} (\delta_i^3 + \\ & + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1) (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^2 + \delta_j^2 x^1) + c_{14} [\delta_i^1 (\delta_j^4 + \delta_j^1 x^1 + \delta_j^2 x^2) + \delta_j^1 (\delta_i^4 + \delta_i^1 x^1 + \\ & + \delta_i^2 x^2)] + c_{24} [\delta_i^2 (\delta_j^4 + \delta_j^1 x^1 + \delta_j^2 x^2) + \delta_j^2 (\delta_i^4 + \delta_i^1 x^1 + \delta_i^2 x^2)] + c_{34} [(\delta_i^3 + \delta_i^1 x^2 + \\ & + \delta_i^2 x^1) (\delta_j^4 + \delta_j^1 x^1 + \delta_j^2 x^2) + (\delta_j^3 + \delta_j^1 x^2 + \delta_j^2 x^1) (\delta_i^4 + \delta_i^1 x^1 + \delta_i^2 x^2)] + c_{44} (\delta_i^4 + \\ & + \delta_i^1 x^1 + \delta_i^2 x^2) (\delta_j^4 + \delta_j^1 x^1 + \delta_j^2 x^2). \end{aligned}$$

care sînt polinoame de grad cel mult doi.

40. Pornind de la V_3 cu conexiunea $\Gamma_{11}^3 = \Gamma_{22}^3 = 1$ găsim spații considerate anterior.

41. Pornind de la V_3 cu conexiunea $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^3 = 1$ restul nuli, operatorii atașați lui V_4 sînt:

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_1 + x^1 \partial_2 + x^2 \partial_3 + p_{1j}^4 x^j \partial_4 \quad (j = 1, 2, 3) \\ X_2 &= \partial_3 + x^1 \partial_3 + p_{2j}^4 x^j \partial_4 \\ X_3 &= \partial_3 + p_{3j}^4 x^j \partial_4 \\ X_4 &= \partial_4 \end{aligned}$$

Din permutabilitatea operatorilor rezultă:

$$p_{12}^4 = p_{21}^4, \quad p_{13}^4 = p_{31}^4 = p_{22}^4, \quad p_{23}^4 = p_{32}^4 = p_{33}^4 = 0$$

iar conexiunea lui V_4 este

$$\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^3 = 1, \quad \Gamma_{11}^4 = p_{11}^4, \quad \Gamma_{12}^4 = p_{12}^4 = p_{21}^4, \quad \Gamma_{13}^4 = p_{13}^4 = p_{31}^4 = \Gamma_{22}^4$$

Putem lua:

$$\begin{aligned} u^1 &= x^1 \\ u^2 &= x^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2 \\ u^3 &= x^3 + x^1 x^2 + \frac{1}{3!} (x^1)^3 \\ u^4 &= x^4 + \frac{1}{2} [p_{11}^4 (x^1)^2 + 2p_{12}^4 x^1 x^2 + 2p_{13}^4 x^1 x^3 + p_{13}^4 (x^2)^2] + \\ &+ \frac{1}{3!} [p_{12}^4 (x^1)^3 + 3p_{13}^4 (x^1)^2 x^2] + \frac{1}{4!} p_{13}^4 (x^1)^4 \end{aligned}$$

Consider transformarea liniară

$$\bar{u}^1 = u^1$$

$$\bar{u}^2 = u^2$$

$$\bar{u}^3 = u^3$$

$$\begin{aligned} \bar{u}^4 = & c_1 u^1 + c_2 u^2 + c_3 u^3 + c_4 u^4 = c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \\ & + \frac{1}{2} c_2 (x^1)^2 + c_3 x^1 x^2 + \frac{1}{2} c_4 [p_{11}^4 (x^1)^2 + 2p_{12}^4 x^1 x^2 + 2p_{13}^4 x^1 x^3 + \\ & + p_{13}^4 (x^2)^2] + \frac{1}{3!} c_3 (x^1)^3 + \frac{1}{3!} c_4 [p_{12}^4 (x^1)^3 + 3p_{13}^4 (x^1)^2 x^2] + \frac{1}{4!} c_4 p_{13}^4 (x^1)^4 \end{aligned}$$

care lasă invariantă conexiunea constantă a spațiului

Luînd

$$c_1 = 0, \quad c_2 = -\frac{p_{11}^4}{p_{13}^4}, \quad c_3 = -\frac{p_{12}^4}{p_{13}^4}, \quad c_4 = \frac{1}{p_{13}^4}$$

prin această transformare avem $\bar{p}_{13}^4 = 1$, $\bar{p}_{11}^4 = \bar{p}_{12}^4 = 0$ și obținem forma canonică :

$$u^1 = x^1$$

$$u^2 = x^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2$$

$$u^3 = x^3 + x^1 x^2 + \frac{1}{3!} (x^1)^3$$

$$u^4 = x^4 + x^1 x^2 + \frac{1}{2} (x^2)^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2 x^2 + \frac{1}{4!} (x^1)^4$$

de unde

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^i} = \delta_i^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^i} = \delta_i^2 + \delta_i^1 x^1, \quad \frac{\partial u^3}{\partial x^i} = \delta_i^3 + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1 + \frac{1}{2} \delta_i^1 (x^1)^2$$

$$\frac{\partial u^4}{\partial x^i} = \delta_i^4 [x^3 + x^1 x^2 + \frac{1}{3!} (x^1)^3] + \delta_i^2 [x^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2] + \delta_i^3 x^1 + \delta_i^1$$

Așa că avem :

$$\begin{aligned} a_{ij} = & c_{11} \delta_i^1 \delta_j^1 + c_{12} [\delta_i^1 (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) + \delta_j^1 (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1)] + c_{22} (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1) (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) + \\ & + c_{13} \left\{ \delta_i^1 [\delta_j^3 + \delta_j^1 x^2 + \delta_j^2 x^1 + \frac{1}{2} \delta_j^1 (x^1)^2] + \delta_j^1 [\delta_i^3 + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1 + \frac{1}{2} \delta_i^1 (x^1)^2] \right\} + \\ & + c_{23} \left\{ (\delta_i^2 + \delta_i^1 x^1) [\delta_j^3 + \delta_j^1 x^2 + \delta_j^2 x^1 + \frac{1}{2} \delta_j^1 (x^1)^2] + (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) [\delta_i^3 + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1 + \frac{1}{2} \delta_i^1 (x^1)^2] \right\} + \\ & + c_{33} [\delta_i^3 + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1 + \frac{1}{2} \delta_i^1 (x^1)^2] [\delta_j^3 + \delta_j^1 x^2 + \delta_j^2 x^1 + \frac{1}{2} \delta_j^1 (x^1)^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \delta_j^1 (x^1)^2] + c_{14} \left\{ \delta_i^1 \left[\delta_j^1 \left(x^3 + x^1 x^2 + \frac{1}{3!} (x^1)^3 \right) + \delta_j^2 \left(x^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2 \right) + \delta_j^3 x^1 + \delta_j^4 \right] + \right. \\
& + \delta_j^1 \left[\delta_i^1 \left(x^3 + x^1 x^2 + \frac{1}{3!} (x^1)^3 \right) + \delta_i^2 \left(x^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2 \right) + \delta_i^3 x^1 + \delta_i^4 \right] \left. \right\} + c_{24} \left\{ (\delta_i^2 + \right. \\
& + \delta_i^1 x^1) \left[\delta_j^1 \left(x^3 + x^1 x^2 + \frac{1}{3!} (x^1)^3 \right) + \delta_j^2 \left(x^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2 \right) + \delta_j^3 x^1 + \delta_j^4 \right] + \right. \\
& + (\delta_j^2 + \delta_j^1 x^1) \left[\delta_i^1 \left(x^3 + x^1 x^2 + \frac{1}{3!} (x^1)^3 \right) + \delta_i^2 \left(x^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2 \right) + \delta_i^3 x^1 + \delta_i^4 \right] \left. \right\} + \\
& + c_{34} \left\{ \left[\delta_i^3 + \delta_i^1 x^2 + \delta_i^2 x^1 + \frac{1}{2} \delta_i^1 (x^1)^2 \right] \left[\delta_j^1 \left(x^3 + x^1 x^2 + \frac{1}{3!} (x^1)^3 \right) + \delta_j^2 (x^2 + \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} (x^1)^2) + \delta_j^3 x^1 + \delta_j^4 \left. \right] + \left[\delta_j^3 + \delta_j^1 x^2 + \delta_j^2 x^1 + \frac{1}{2} \delta_j^1 (x^1)^2 \right] \left[\delta_i^1 \left(x^3 + x^1 x^2 + \right. \right. \\
& + \frac{1}{3!} (x^1)^3) + \delta_i^2 \left(x^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2 \right) + \delta_i^3 x^1 + \delta_i^4 \left. \right] \left. \right\} + c_{44} \left\{ \delta_i^1 \left[x^3 + x^1 x^2 + \frac{1}{3} (x^1)^3 \right] + \right. \\
& + \delta_i^2 \left[x^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2 \right] + \delta_i^3 x^1 + \delta_i^4 \left. \right\} \left\{ \delta_j^1 \left[x^3 + x^1 x^2 + \frac{1}{3!} (x^1)^3 \right] + \delta_j^2 \left[x^2 + \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} (x^1)^2 \left. \right] + \delta_j^3 x^1 + \delta_j^4 \left. \right\}
\end{aligned}$$

care sînt polinoame de gradul şase.

Spații V_5 .

42. Determinăm, utilizînd aceeași metodă, conexiunile și metricile spațiilor V_5 reductibile și ireductibile cu conexiune contractată nulă.

Spațiile V_5 reductibile se obțin analog, ca produse carteziene de spații ireductibile iar spațiile V_5 ireductibile cu conexiune contractată *nenulă* se determină direct din conexiunile spațiilor V_4 reductibile și ireductibile cu conexiune contractată nulă prin adunarea „unității”.

Luăm pentru spațiul $V_4(x^1, x^2, x^3, x^4)$ conexiunea :

$$\Gamma_{ij}^4 = p_{ij}^4, \quad p_{ij}^4 = p_{ji}^4, \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Operatorii atașați spațiului V_5 sînt

$$X_i = \partial_i + p_{ij}^4 x \partial_4 + p_{1a}^5 x^a \partial_5 \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

$$X_4 = \partial_4 + p_{4a}^5 x^a \partial_5$$

$$X_5 = \partial_5$$

Din condițiile de permutabilitate rezultă $p_{\alpha\beta}^5 = p_{\beta\alpha}^5$, iar celelalte relații se obțin din anularea tensorului de curbura $p_{\alpha\beta}^4 p_{4\gamma}^5 - p_{\alpha\gamma}^4 p_{4\beta}^5 = 0$. Avem astfel sistemul

$$p_{\alpha\beta}^5 = p_{\beta\alpha}^5$$

$$p_{\alpha\beta}^4 p_{4\gamma}^5 - p_{\alpha\gamma}^4 p_{4\beta}^5 = 0$$

Pentru determinarea efectivă să presupunem că am adus la forma canonică conexiunea lui V_4 .

În primul rînd luăm pentru V_4 conexiunea nulă deci $p_{ij}^4 = 0$. Toate relațiile (1) sînt verificate și putem lua

$$u^\alpha = x^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

$$u^5 = x^5 + \frac{1}{2} p_{\alpha\beta}^5 x^\alpha x^\beta$$

Prin transformări liniare asupra lui x^α ultima forma pătratică o aducem la forme canonice ca să obținem spații V_5 ireductibile. Avem următoarele 3 forme neechivalente :

$$a) \quad u^\alpha = x^\alpha, \quad u^5 = x^5 + \frac{1}{2} [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2]$$

$$b) \quad u^\alpha = x^\alpha, \quad u^5 = x^5 + \frac{1}{2} [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2]$$

$$c) \quad u^\alpha = x^\alpha, \quad u^5 = x^5 + \frac{1}{2} [(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2]$$

prin derivare și utilizînd formulele generale deducem că componentele tensorului metric al lui V_5 , a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5$) sînt polinoame de grad cel mult doi.

43. Presupunînd pentru V_4 formele canonice ale conexiunii :

a) $\Gamma_{11}^4 = 1$ restul nuli, rezultă din sist.(1)	$p_{24}^5 = p_{34}^5 = p_{44}^5 = 0$
b) $\Gamma_{11}^4 = \Gamma_{22}^4 = 1$ „ „ „	$p_{14}^5 = p_{24}^5 = p_{34}^5 = p_{44}^5 = 0$
c) $\Gamma_{12}^4 = 1$ „ „ „	$p_{14}^5 = p_{24}^5 = p_{34}^5 = p_{44}^5 = 0$
d) $\Gamma_{11}^4 = \Gamma_{22}^4 = \Gamma_{33}^4 = 1$ „ „ „	$p_{14}^5 = p_{24}^5 = p_{34}^5 = p_{44}^5 = 0$
e) $\Gamma_{11}^4 = \Gamma_{22}^4 = -\Gamma_{33}^4 = 1$ „ „ „	$p_{14}^5 = p_{24}^5 = p_{34}^5 = p_{44}^5 = 0$

Putem lua pentru cazul a)

$$u^\alpha = x^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

$$u^4 = x^4 + \frac{1}{2} (x^1)^2$$

$$u^5 = x^5 + \frac{1}{2} [p_{11}^5 (x^1)^2 + 2p_{12}^5 x^1 x^2 + 2p_{13}^5 x^1 x^3 + 2p_{14}^5 x^1 x^4 + p_{22}^5 (x^2)^2 +$$

$$+ 2p_{23}^5 x^2 x^3 + p_{33}^5 (x^3)^2] + \frac{1}{3!} p_{14}^5 (x^1)^3$$

de unde deducem pentru tensorul fundamental polinoame de grad cel mult patru,

cazul *b*)

$$u^\alpha = x^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

$$u^4 = x^4 + \frac{1}{2} [(x^1)^2 + (x^2)^2]$$

$$u^5 = x^5 + \frac{1}{2} [p_{11}^5(x^1)^2 + 2p_{12}^5x^1x^2 + 2p_{13}^5x^1x^3 + p_{22}^5(x^2)^2 + 2p_{23}^5x^2x^3 + p_{33}^5(x^3)^2]$$

și coeficienții tensorului fundamental sînt polinoame de grad cel mult doi.

cazul *c*)

$$u^\alpha = x^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

$$u^4 = x^4 + x^1x^2$$

$$u^5 = x^5 + \frac{1}{2} [p_{11}^5(x^1)^2 + 2p_{12}^5x^1x^2 + 2p_{13}^5x^1x^3 + p_{22}^5(x^2)^2 + 2p_{23}^5x^2x^3 + p_{33}^5(x^3)^2]$$

și a_{ij} sînt polinoame de grad cel mult doi.

cazul *d*)

$$u^\alpha = x^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

$$u^4 = x^4 + \frac{1}{2} [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]$$

$$u^5 = x^5 + \frac{1}{2} [p_{11}^5(x^1)^2 + 2p_{12}^5x^1x^2 + 2p_{13}^5x^1x^3 + p_{22}^5(x^2)^2 + 2p_{23}^5x^2x^3 + p_{33}^5(x^3)^2]$$

unde de asemenea a_{ij} sînt polinoame de grad cel mult doi.

Pentru cazul *e*) putem lua:

$$u^\alpha = x^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

$$u^4 = x^4 + \frac{1}{2} [(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2]$$

$$u^5 = x^5 + \frac{1}{2} [p_{11}^5(x^1)^2 + 2p_{12}^5x^1x^2 + 2p_{13}^5x^1x^3 + p_{22}^5(x^2)^2 + 2p_{23}^5x^2x^3 + p_{33}^5(x^3)^2]$$

iar a_{ij} sînt polinoame de grad doi.

44. Presupunînd acum pentru V_4 formele canonice ale conexiunii:

a) $\Gamma_{11}^2 = 1$, $p_{11}^4 = 0$, $p_{12}^4 = 0$, $p_{13}^4 = 0$, $p_{33}^4 = 0$ rezultă din sistemul (1)

$$p_{22}^5 = p_{23}^5 = p_{24}^5 = 0$$

b) $\Gamma_{11}^2 = 1$, $p_{12}^4 = p_{13}^4 = 0$, $p_{33}^4 = 1$ din sistemul (1) rezultă

$$p_{14}^5 = p_{22}^5 = p_{24}^5 = p_{44}^5 = 0, \quad p_{23}^5 = -p_{11}^4 p_{34}^5$$

c) $\Gamma_{11}^2 = 1$, $p_{12}^4 = 1$, $p_{33}^4 = 0$ și din sistemul (1)

$$p_{24}^5 = p_{34}^5 = p_{44}^5 = 0, \quad p_{23}^5 = p_{13}^4 p_{14}^5, \quad p_{22}^5 = p_{14}^5$$

d) $\Gamma_{11}^2 = 1$, $p_{11}^4 = p_{12}^4 = p_{33}^4 = 0$, $p_{13}^4 = 1$ din sistemul (1) rezultă

$$p_{44}^5 = p_{22}^5 = p_{24}^5 = p_{34}^5 = 0, \quad p_{23}^5 = p_{14}^5$$

e) $\Gamma_{11}^2 = 1$, $p_{11}^4 = 1$, $p_{12}^4 = p_{13}^4 = p_{33}^4 = 0$ din sistemul (1) rezultă

$$p_{22}^5 = -p_{24}^5, \quad p_{13}^5 = -p_{34}^5, \quad p_{44}^5 = -p_{24}^5$$

f) $\Gamma_{11}^2 = 1$, $p_{13}^4 = 0$, $p_{33}^4 = 1$ din sistemul (1) rezultă

$$p_{14}^5 = p_{22}^5 = p_{23}^5 = p_{24}^5 = p_{34}^5 = p_{44}^5 = 0$$

putem lua pentru cazul a). [Acest caz coincide cu cazul 51 a)

$$u^1 = x^1$$

$$u^2 = x^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2$$

$$u^3 = x^3$$

$$u^4 = x^4$$

$$u^5 = u^5 + \frac{1}{2} [p_{11}^5 (x^1)^2 + 2p_{12}^5 x^1 x^2 + 2p_{13}^5 x^1 x^3 + 2p_{14}^5 x^1 x^4 + p_{33}^5 (x^3)^2 + \\ + 2p_{34}^5 x^3 x^4 + p_{44}^5 (x^4)^2] + \frac{1}{3!} p_{12}^5 (x^1)^3$$

și a_{ij} sînt polinoame de grad cel mult patru.
(cazul b)

$$u^1 = x^1$$

$$u^2 = x^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2$$

$$u^3 = x^3$$

$$u^4 = x^4 + \frac{1}{2} [p_{11}^4 (x^1)^2 + (x^3)^2]$$

$$u^5 = x^5 + \frac{1}{2} [p_{11}^5 (x^1)^2 + 2p_{12}^5 x^1 x^2 + 2p_{13}^5 x^1 x^3 - 2p_{11}^4 p_{34}^5 x^2 x^3 + p_{33}^5 (x^3)^2 + \\ + 2p_{34}^5 x^3 x^4] + \frac{1}{3!} [p_{12}^5 (x^1)^3 + p_{34}^5 (x^3)^3]$$

iar a_{ji} sînt polinoame de grad cel mult patru.

Pentru cazul c) putem lua:

$$u^1 = x^1$$

$$u^2 = x^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2$$

$$u^3 = x^3$$

$$u^4 = x^4 + \frac{1}{2} [p_{11}^4 (x^1)^2 + 2x^1 x^2 + 2p_{13}^4 x^1 x^3] + \frac{1}{3!} (x^1)^3$$

$$u^5 = x^5 + \frac{1}{2} [p_{11}^5 (x^1)^2 + 2p_{12}^5 x^1 x^2 + 2p_{13}^5 x^1 x^3 + 2p_{14}^5 x^1 x^4 + p_{14}^5 (x^2)^2 + \\ + 2p_{13}^4 p_{14}^5 x^2 x^3 + p_{33}^5 (x^3)^2] + \frac{1}{3!} [(p_{11}^4 p_{14}^5 + p_{12}^5) (x^1)^3 + 3p_{14}^5 (x^1)^2 x^2 + \\ + 3p_{13}^4 p_{14}^5 (x^1)^2 x^3] + \frac{1}{4!} p_{14}^5 (x^1)^4$$

și a_{ij} sînt polinoame de grad cel mult șase.

Cazul d). Putem lua :

$$u^1 = x^1$$

$$u^2 = x^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2$$

$$u^3 = x^3$$

$$u^4 = x^4 + x^1 x^3$$

$$u^5 = x^5 + \frac{1}{2} [p_{11}^5 (x^1)^2 + 2p_{12}^5 x^1 x^2 + 2p_{13}^5 x^1 x^3 + 2p_{14}^5 x^1 x^4 + 2p_{14}^5 x^2 x^3 + \\ + p_{33}^5 (x^3)^2] + \frac{1}{3!} [p_{12}^5 (x^1)^2 + 3p_{14}^5 (x^1)^2 x^3]$$

a_{ij} sînt polinoame de grad patru.

Cazul e). Luăm

$$u^1 = x^1$$

$$u^2 = x^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2$$

$$u^3 = x^3$$

$$u^4 = x^4 + \frac{1}{2} (x^1)^2$$

$$u^5 = x^5 + \frac{1}{2} [p_{11}^5 (x^1)^2 + 2p_{12}^5 x^1 x^2 + 2p_{13}^5 x^1 x^3 + 2p_{14}^5 x^1 x^4 + p_{22}^5 (x^2)^2 + \\ + 2p_{23}^5 x^2 x^3 - 2p_{22}^5 x^2 x^4 + p_{33}^5 (x^3)^2 - 2p_{23}^5 x^3 x^4 + p_{22}^5 (x^4)^2] + \frac{1}{3!} (p_{14}^5 + p_{12}^5) (x^1)^3$$

și a_{ij} sînt polinoame de grad cel mult patru.

Cazul f). Luăm

$$u^1 = x^1$$

$$u^2 = x^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2$$

$$u^3 = x^3$$

$$u^4 = x^4 + \frac{1}{2} [p_{11}^4(x^1)^2 + 2p_{12}^4x^1x^2 + (x^3)^2] + \frac{1}{3!} p_{12}^4(x^1)^3$$

$$u^5 = x^5 + \frac{1}{2} [p_{11}^5(x^1)^2 + 2p_{12}^5x^1x^2 + 2p_{13}^5x^1x^3 + p_{33}^5(x^3)^2] + \frac{1}{3!} p_{12}^5(x^1)^3$$

și a_{ij} sînt polinoame de grad cel mult patru.

45. Considerăm acum pentru V_4 formele canonice ale conexiunii :

a) $\Gamma_{12}^3 = 1, \quad p_{11}^4 = p_{12}^4 = p_{22}^4 = 0$ din (1) rezultă

$$p_{13}^5 = p_{23}^5 = p_{33}^5 = p_{34}^5 = 0$$

b) $p_{11}^4 = -p_{12}^4 = p_{22}^4 = \lambda, \quad \lambda \neq 0$ din (1) rezultă

$$p_{33}^5 = p_{34}^5 = p_{44}^5 = 0, \quad p_{13}^5 = p_{23}^5 = \lambda(p_{14}^5 + p_{24}^5)$$

c) $p_{11}^4 = p_{22}^4 = 0, \quad p_{12}^4 = 1$ din (1) rezultă

$$p_{13}^5 = -p_{14}^5, \quad p_{23}^5 = -p_{24}^5, \quad p_{33}^5 = -p_{34}^5 = p_{44}^5$$

d) $p_{22}^4 = 0, \quad p_{12}^4 = 1, \quad p_{11}^4 = -2$, din (1) rezultă

$$p_{33}^5 = p_{34}^5 = p_{44}^5 = 0, \quad p_{13}^5 = -2p_{24}^5 - p_{14}^5, \quad p_{23}^5 = -p_{24}^5$$

e) $p_{11}^4 = p_{22}^4 = 1, \quad p_{12}^4 = 0$ din (1) rezultă

$$p_{33}^5 = p_{34}^5 = p_{44}^5 = 0, \quad p_{13}^5 = p_{24}^5, \quad p_{23}^5 = p_{14}^5$$

Cazul a). Luăm

$$u^1 = x^1$$

$$u^2 = x^2$$

$$u^3 = x^3 + x^1x^2$$

$$u^4 = x^4$$

$$u^5 = x^5 + \frac{1}{2} [p_{11}^5(x^1)^2 + 2p_{12}^5x^1x^2 + 2p_{14}^5x^1x^4 + p_{22}^5(x^2)^2 + 2p_{24}^5x^2x^4 + p_{44}^5(x^4)^2]$$

și componentele tensorului fundamental sînt polinoame de grad cel mult doi

Cazul b). Luăm

$$u^1 = x^1$$

$$u^2 = x^2$$

$$u^3 = x^3 + x^1x^2$$

$$u^4 = x^4 + \frac{1}{2} \lambda [(x^1)^2 - 2x^1x^2 + (x^2)^2]$$

$$\begin{aligned}
 u^5 = x^5 + \frac{1}{2} [p_{11}^5(x^1)^2 + 2p_{12}^5x^1x^2 + 2\lambda(p_{24}^5 + p_{14}^5)x^1x^3 + 2p_{14}^5x^1x^4 + \\
 + p_{22}^5(x^2)^2 + 2\lambda(p_{24}^5 + p_{14}^5)x^2x^3 + 2p_{24}^5x^2x^4] + \frac{1}{3!} \lambda [p_{14}^5(x^1)^3 + 3p_{14}^5x^1(x^2)^2 + \\
 + 3p_{24}^5x^2(x^1)^2 + p_{24}^5(x^2)^3]
 \end{aligned}$$

iar a_{ij} sînt polinoame de grad cel mult patru.

Cazul c). Putem lua

$$u^1 = x^1$$

$$u^2 = x^2$$

$$u^3 = x^3 + x^1x^2$$

$$u^4 = x^4 + x^1x^2$$

$$\begin{aligned}
 u^5 = x^5 + \frac{1}{2} [p_{11}^5(x^1)^2 + 2p_{12}^5x^1x^2 + 2p_{13}^5x^1x^3 - 2p_{13}^5x^1x^4 + p_{22}^5(x^2)^2 + \\
 + 2p_{23}^5x^2x^3 - 2p_{23}^5x^2x^4 + p_{33}^5(x^3)^2 - 2p_{33}^5x^3x^4 + p_{33}^5(x^4)^2]
 \end{aligned}$$

și a_{ij} sînt polinoame de grad cel mult doi.

Cazul d). Luăm

$$u^1 = x^1$$

$$u^2 = x^2$$

$$u^3 = x^3 + x^1x^2$$

$$u^4 = x^4 - (x^1)^2 + x^1x^2$$

$$\begin{aligned}
 u^5 = x^5 + \frac{1}{2} [p_{11}^5(x^1)^2 + p_{12}^5x^1x^2 + (-2p_{24}^5 - p_{14}^5)x^1x^3 + 2p_{14}^5x^1x^4 + \\
 + p_{22}^5(x^2)^2 - 2p_{24}^5x^2x^3 + 2p_{24}^5x^2x^4] + \frac{1}{3!} [-2p_{14}^5(x^1)^3 - 6p_{24}^5(x^1)^2x^2]
 \end{aligned}$$

iar a_{ij} sînt polinoame de grad cel mult patru.

Cazul e). Luăm

$$u^1 = x^1$$

$$u^2 = x^2$$

$$u^3 = x^3 + x^1x^2$$

$$u^4 = x^4 + \frac{1}{2} [(x^1)^2 + (x^2)^2]$$

$$\begin{aligned}
 u^5 = x^5 + \frac{1}{2} [p_{11}^5(x^1)^2 + 2p_{12}^5x^1x^2 + 2p_{13}^5x^1x^3 + 2p_{14}^5x^1x^4 + p_{22}^5(x^2)^2 + \\
 + 2p_{14}^5x^2x^3 + 2p_{13}^5x^2x^4] + \frac{1}{3!} [p_{14}^5(x^1)^3 + 3p_{13}^5(x^1)^2x^2 + 3p_{14}^5x^1(x^2)^2 + p_{13}^5(x^2)^3]
 \end{aligned}$$

iar a_{ij} sînt polinoame de grad cel mult patru.

46. Să considerăm acum pentru V_4 formele canonice ale conexiunii :

a) $\Gamma_{11}^2 = 1$ $\Gamma_{12}^3 = 1$ $p_{11}^4 = p_{12}^4 = p_{13}^4 = p_{22}^4 = 0$ iar din sistemul (1) rezultă

$$p_{23}^5 = p_{24}^5 = p_{33}^5 = p_{34}^5 = 0 \quad p_{13}^5 = p_{22}^5$$

b) $\Gamma_{11}^2 = 1$ $\Gamma_{12}^3 = 1$ $p_{13}^4 = p_{22}^4 = 1$ iar din sistemul (1) rezultă

$$p_{24}^5 = p_{34}^5 = p_{33}^5 = p_{44}^5 = 0, \quad p_{23}^5 = p_{14}^5, \quad p_{22}^5 = p_{12}^4 p_{14}^5 + p_{13}^5$$

c) $\Gamma_{11}^2 = 1$ $\Gamma_{12}^3 = 1$ $p_{13}^4 = p_{22}^4 = 0$ $p_{12}^4 = 1$ iar din sistemul (1) rezultă

$$p_{22}^5 = (p_{12}^4)^2 p_{44}^5 + p_{14}^5 + p_{13}^5, \quad p_{24}^5 = -p_{11}^4 p_{44}^5, \quad p_{23}^5 = p_{11}^4 p_{44}^5, \quad p_{33}^5 = p_{44}^5 = -p_{34}^5$$

d) $\Gamma_{11}^2 = 1$ $\Gamma_{12}^3 = 1$ $p_{13}^4 = p_{22}^4 = p_{12}^4 = 0$, $p_{11}^4 = 1$ iar din sistemul (1) rezultă

$$p_{22}^5 = p_{44}^5 + p_{13}^5, \quad p_{23}^5 = p_{33}^5 = p_{34}^5 = 0, \quad p_{24}^5 = -p_{44}^5$$

Pentru cazul a) putem lua :

$$u^1 = x^1$$

$$u^2 = x^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2$$

$$u^3 = x^3 + x^1 x^2 + \frac{1}{3!} (x^1)^3$$

$$u^4 = x^4$$

$$u^5 = x^5 + \frac{1}{2} [p_{11}^5 (x^1)^2 + 2p_{12}^5 x^1 x^2 + 2p_{13}^5 x^1 x^3 + 2p_{14}^5 x^1 x^4 + p_{13}^5 (x^2)^2 + \\ + p_{44}^5 (x^4)^2] + \frac{1}{3!} [p_{12}^5 (x^1)^3 + 3p_{13}^5 (x^1)^2 x^2] + \frac{1}{4!} p_{13}^5 (x^1)^4$$

iar a_{ij} sînt polinoame de grad cel mult șase.

Cazul b). Luăm :

$$u^1 = x^1$$

$$u^2 = x^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2$$

$$u^3 = x^3 + x^1 x^2 + \frac{1}{3!} (x^1)^3$$

$$u^4 = x^4 + \frac{1}{2} [p_{11}^4 (x^1)^2 + 2p_{12}^4 x^1 x^2 + 2x^1 x^3 + (x^2)^2] + \frac{1}{3!} [p_{12}^4 (x^1)^3 + \\ + 3(x^1)^2 x^2] + \frac{1}{4!} (x^1)^4$$

$$u^5 = x^5 + \frac{1}{2} [p_{11}^5 (x^1)^2 + 2p_{12}^5 x^1 x^2 + 2p_{13}^5 x^1 x^3 + 2p_{14}^5 x^1 x^4 + (p_{12}^4 p_{14}^5 + \\ + p_{13}^5) (x^2)^2 + 2p_{14}^5 x^2 x^3] + \frac{1}{3!} [(p_{12}^5 + p_{11}^4 p_{14}^5) (x^1)^3 + 3(p_{12}^4 p_{14}^5 + p_{13}^5) (x^1)^2 x^2 +$$

$$+ 3p_{14}^5(x^1)^2x^3 + 3p_{14}^5x^1(x^2)^2] + \frac{1}{4!} [(p_{12}^4p_{14}^5 + p_{13}^5)(x^1)^4 + 3p_{14}^5(x^1)^3x^2] + \\ + \frac{1}{5!} p_{14}^5(x^1)^5$$

iar a_{ij} sînt polinoame de grad cel mult opt.

(cazul c). Luăm :

$$u^1 = x^1$$

$$u^2 = x^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2$$

$$u^3 = x^3 + x^1x^2 + \frac{1}{3!} (x^1)^3$$

$$u^4 = x^4 + \frac{1}{2} [p_{11}^4(x^1)^2 + 2x^1x^2] + \frac{1}{3!} (x^1)^3$$

$$u^5 = x^5 + \frac{1}{2} [p_{11}^5(x^1)^2 + 2p_{12}^5x^1x^2 + 2p_{13}^5x^1x^3 + 2p_{14}^5x^1x^4 + ((p_{11}^4)^2 + p_{14}^5 + \\ + p_{13}^5)(x^2)^2 + 2p_{11}^4p_{44}^5x^2x^3 - 2p_{11}^4p_{44}^5x^2x^4 + p_{44}^5(x^3)^2 - 2p_{44}^5x^3x^4 + p_{44}^5(x^4)^2] + \\ + \frac{1}{3!} [(p_{11}^4p_{14}^5 + p_{12}^5)(x^1)^3 + 3(p_{13}^5 + p_{14}^5)(x^1)^2x^2] + \frac{1}{4!} (p_{14}^5 + p_{13}^5)(x^1)^4$$

iar a_{ij} sînt polinoame de grad cel mult şase.

Şi în sfîrşit cazul d) Putem lua :

$$u^1 = x^1$$

$$u^2 = x^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2$$

$$u^3 = x^3 + x^1x^2 + \frac{1}{3!} (x^1)^3$$

$$u^4 = x^4 + \frac{1}{2} (x^1)^2$$

$$u^5 = x^5 + \frac{1}{2} [p_{11}^5(x^1)^2 + 2p_{12}^5x^1x^2 + 2p_{14}^5x^1x^4 + 2p_{13}^5x^1x^3 + (p_{13}^5 + p_{44}^5)(x^2)^2 - \\ - 2p_{44}^5x^2x^4 + p_{44}^5(x^4)^2] + \frac{1}{3!} [(p_{12}^5 + p_{14}^5)(x^1)^3 + 3p_{13}^5(x^1)^2x^2] + \frac{1}{4!} p_{13}^5(x^1)^4$$

şi componentele tensorului fundamental sînt polinoame de grad cel mult şase.

În toate aceste cazuri care nu le dăm efectiv componentele tensorului metric al spaţiilor V_5 sînt polinoame de grad cel mult opt.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Vrănceanu: Leçon de Géométrie Différentielle vol. II 1962
2. G. Vrănceanu: Spora gli spazi di Riemann a connessione costante. Annali di Matematica-1962.
3. P. Mocanu: Asupra spațiilor cu conexiune afină constantă A_3 , local euclidiene. Comunicările Acad. R.P.R. tom. I 1951, nr. 3.
4. C. Telean: Spații local euclidiene. Studii și Cercetări mat. 1964
5. A. G. Kuroș: Algebra superioară 1958 pag. 352.
6. Ion D. Teodorescu: „Studiul unor spații local euclidiene $A_2(x, y)$ cu conexiune polinomială” lucrare de dizertație, Fac. Mat — Mec. Univ. București 1964.

РИМАННОВЫ ПРОСТРАНСТВА V_4 И V_5 С ПОСТОЯННОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе определяется метрика римановых пространств V_4 , локально эвклидовых, которые в определённой системе координат имеют постоянные коэффициенты связности; задача сводится к определению постоянных аффинных связностей без кривизны и кручения и к интегрированию системы из 40 линейных уравнений с частными производными Риччи. Различаются 2 главных случая: потенциальные и nilпотентные связности и для каждого из них — частные случаи: редуцированные и нередуцированные.

Используя метод, указанный К. Телеманом, определяются nilпотентные аффинные связности без кривизны пространства V_5 .

ESPACES DE RIEMANN V_4 ET V_5 AVEC CONNEXION CONSTANTE

RÉSUMÉ

Le but de ce travail est de déterminer les métriques des espaces de Riemann localement euclidiens dont les coefficients de la connexion de Levi-Civita sont constants dans un système de coordonnées convenablement choisi. Le problème se réduit à la détermination des connexions affines constantes, sans courbure et sans torsion et à l'intégration du système d'équations aux dérivées partielles de Ricci, qui dans notre cas sont au nombre de quarante. On peut distinguer deux cas: connexions à algèbre associée potentielle ou nilpotente et on a aussi à indiquer des connexions réductibles et irréductibles.

En utilisant une méthode indiquée par C. Telean, on donne aussi les connexions constantes sans courbure à algèbre nilpotente, de dimension cinq.

ARTICLE IN BRIEF

THE EFFECT OF VITAMIN C ON THE ABSORPTION OF IRON IN THE HUMAN GASTROINTESTINAL TRACT

W. H. HALL, M.D., and J. H. HALL, M.D., University of California, San Francisco, California

The effect of vitamin C on the absorption of iron in the human gastrointestinal tract was studied in a series of experiments in which the absorption of iron was measured by the method of Schur and Wootton.

The results of the experiments show that the absorption of iron is increased by the administration of vitamin C. The increase in absorption is proportional to the dose of vitamin C administered.

The mechanism of the effect of vitamin C on the absorption of iron is not known, but it is believed that the effect is due to the reduction of ferric iron to ferrous iron, which is more readily absorbed.

The results of these experiments suggest that the administration of vitamin C may be useful in the treatment of iron deficiency anemia.

The authors are indebted to the National Institutes of Health for the grant which supported this work.

Received for publication, June 10, 1954.

Reprints: Dr. W. H. Hall, Department of Medicine, University of California, San Francisco, California.

Copyright © 1954 by American Medical Association

0003-6819/54/0000-0021\$01.00/0

Printed in the U.S.A.

Published by the American Medical Association, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill. 60610

Subscription price, \$5.00 per year in advance. Single copies, 15¢.

Second-class postage paid at Chicago, Ill., and at additional mailing offices.

Postmaster: Send address changes in U.S.A. to JOURNAL OF THE AMERICAN MEDICAL ASSOCIATION, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill. 60610.

Outside U.S.A.: Send address changes to JOURNAL OF THE AMERICAN MEDICAL ASSOCIATION, P.O. Box 179, London, W.C.2, England.

Acceptance for mailing at special rate of postage provided for in U.S. Post Office Act of October 3, 1917, authorized on July 1, 1954.

Postage paid by addressee.

EXTINDEREA UNUI PRINCIPIU AL LUI STOILOW LA SUPRAFEȚE RIEMANNIENE

ECATERINA VIȘINESCU

Fie R o suprafață riemanniană. Folosind metoda alternată a lui Schwarz se poate construi funcția lui Green a unui domeniu poliedric $\pi \subset R$ în raport cu polul $0 \in \pi$. Considerind o exhaustiune a suprafeței riemanniene R prin domenii poliedrice π_n alese astfel încât 0 să fie interior lui π_0 se pot construi funcțiile lui Green $G_n(z, 0)$ ale domeniilor π_n . Dacă șirul $G_n(z, 0)$ converge către valori finite în puncte din R diferite de 0 funcția limită se numește funcția lui Green a suprafeței R și va fi notată $G(z, 0)$. $G(z, 0)$ este armonică pe $R - O$, pozitivă și are în vecinătatea lui O o reprezentare de forma $\ln \frac{1}{|z|} + v$ unde v este o funcție armonică în această vecinătate. Dacă șirul $G_n(z, 0)$ tinde către ∞ pe R se spune că suprafața riemanniană R nu admite funcția lui Green. S-a demonstrat că necesar și suficient pentru ca suprafața riemanniană R să nu admită funcția lui Green este ca R să aibă frontiera de măsură armonică nulă.

I. Să considerăm că suprafața riemanniană R are frontiera de măsură armonică pozitivă. Presupunem că suprafața R are genul g finit și ordinul de conexiune deasemeni finit. Pe frontiera suprafeței R se disting curbe din bordul suprafeței R și elemente de frontieră ideală. Curbele ce aparțin bordului suprafeței pot fi curbe închise (fie acestea $B_1, B_2, \dots, B_h$) sau arce. Elementele de frontieră ideală pot fi de două feluri și anume unele pentru care domeniile din șirurile determinante au ca frontiere curbe simple închise incluse în interiorul lui R (pe care curbe să le notăm Γ_{ni}), iar altele pentru care domeniile din șirurile determinante au ca frontiere curbe simple formate dintr-un arc simplu din interiorul lui R avînd extremitățile pe bordul lui R și două arce din bordul suprafeței R limitate în cîte un sens de extremitățile primului arc. Să mai presupunem că suprafața riemanniană R are proprietatea că pentru z tinzînd către orice element de frontieră ideală funcția lui Green $G(z, 0)$ tinde la zero. Domeniile poliedrice de aproximare π_n ale suprafeței riemanniene R vor avea frontierele formate din curbe simple închise ce aparțin bordului suprafeței R pe care le notăm B_{ni} , din curbe simple închise Γ_{ni} și din curbe simple închise formate din arce din bordul suprafeței R și din arce din interiorul suprafeței R pe care le notăm C_{ni} . Pentru n suficient de mare frontiera lui π_n conține toate curbele simple închise

$B_1, B_2, \dots, B_b$ din bordul suprafeței R . Curbele Γ_{n_i} formează frontiere de domenii ce determină elementele de frontieră ideală $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ din primul fel specificat mai sus. Pentru n tinzînd la infinit curbele C_{n_i} determină anumite părți α_i ($i = 1, 2, \dots, l$) din frontiera suprafeței R , fiecare α_i fiind formată din arce din bordul suprafeței R și din elemente de frontieră ideală din al doilea fel specificat mai sus*. Presupunem deci că $h + k + l \geq 1$. În aceste condiții fie $G(z, 0)$ funcția lui Green a suprafeței riemanniene R .

§ 1. *Structura liniilor de nivel ale funcției lui Green pentru suprafața riemanniană R* : Liniile de nivel ale funcției lui Green adică mulțimile de puncte $G(z, 0) = \lambda = \text{constant}$ au următoarele proprietăți: pentru λ suficient de mare linia de nivel $G(z, 0) = \lambda$ este o curbă simplă închisă care înconjoară punctul 0. Când $\lambda \rightarrow \infty$ linia de nivel tinde către punctul 0, iar când λ descrește linia de nivel se depărtează de 0. La un moment dat linia de nivel se întretaie, descompunîndu-se apoi în curbe simple închise disjuncte, sau compunîndu-se într-o curbă simplă închisă. După un număr finit de astfel de descompuneri sau compuneri o linie de nivel va fi formată din $h + k + l$ curbe simple închise care separă curbele $B_1, B_2, \dots, B_b$, elementele de frontieră ideală $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ și elementele frontierei $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ de punctul 0. Când $\lambda \rightarrow 0$ fiecare din aceste $h + k + l$ curbe tinde către unul din elementele frontierei $B_1, \dots, B_b, \gamma_1, \dots, \gamma_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l$.

Demonstrație: Considerăm funcția analitică $F(z) = G(z, 0) + i\overline{G(z, 0)}$ unde $\overline{G(z, 0)}$ este conjugata armonică a funcției $G(z, 0)$. $F(z)$ în jurul fiecărui punct $z \in R - 0$ în care $F'(z) \neq 0$ mijlocește o reprezentare conformă, deci printr-un asemenea punct trece o linie de nivel $G(z, 0) = \lambda$ și o linie de nivel $\overline{G(z, 0)} = t$ ortogonală la prima, formate fiecare în vecinătatea punctului respectiv din arce simple analitice. Dacă într-un punct $z \in R - 0$, $F'(z)$ are un zero de ordin k , prin acest punct trec $k+1$ ramuri diferite ale unei linii $G(z, 0) = \lambda$ și $k+1$ ramuri diferite ale unei linii $\overline{G(z, 0)} = t$, acestea fiind așezate alternativ. Deci mulțimea punctelor $G(z, 0) = \lambda$ sau $\overline{G(z, 0)} = t$ este formată din curbe. Zerourile lui $F'(z)$ formează o mulțime izolată de puncte pe R . Exceptînd valorile λ corespunzătoare zerourilor lui $F'(z)$ când linia de nivel se întretaie, orice linie de nivel a funcției lui Green este formată din curbe simple închise disjuncte. Într-adevăr liniile sînt curbe închise deoarece nu se pot termina nici în punctul 0 unde $G(z, 0) = \infty$, nici pe bordul lui R unde $G(z, 0) = 0$ și nici nu se pot apropia oricît de mult de elementele de frontieră ideală ale lui R căci $G(z, 0) \rightarrow 0$ când $z \in R$ tinde către frontiera ideală a lui R . O linie de nivel nu poate limita un domeniu în care funcția $G(z, 0)$ să fie armonică, căci atunci $G(z, 0)$ în acest domeniu ar trebui să fie o constantă. Însemnează că domeniile în care o linie de nivel $G(z, 0) = \lambda$ descompune suprafața riemanniană R sau conțin în interiorul lor punctul 0, sau conțin pe frontiera lor diverse elemente din frontiera lui R .

Fie δ un domeniu de gen zero din R ce cuprinde punctul 0 în interiorul său și nu conține niciun zero al funcției $F'(z)$ în interiorul său. Fie

* Menționez că fiecare parte de frontieră α_i reprezintă un element de frontieră ideală în sensul Stoilow-Kérékjártó. În acest scop a se vedea [12]

$m = \max_{z \in \text{fr } \delta} G(z, 0)$. Din continuitatea funcției lui Green rezultă că pentru orice $M > m$ cel puțin un punct din interiorul lui δ în care $G(z, 0) = M$. Dar atunci există o curbă simplă închisă din linia de nivel $G(z, 0) = M$ complet inclusă în δ care înconjoară punctul 0 pentru că funcția $F'(z)$ nu are zerouri în interiorul lui δ și pentru că această linie de nivel nu poate tăia frontiera lui δ unde $\max_{z \in \text{fr } \delta} G(z, 0) = m < M$. Pentru M fixat să notăm cu c această linie de nivel $G(z, 0) = M$ și cu d domeniul limitat de c care conține în interiorul său punctul 0.

În mod analog pentru fiecare din elementele frontieră $B_1, \dots, B_b, \gamma_1, \dots, \gamma_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l$ să considerăm câte un domeniu Δ_i de gen 0 a cărui frontieră să fie formată din elementul frontieră considerat și dintr-o curbă simplă închisă β_i complet inclusă în interiorul lui R care separă elementul frontieră considerat de punctul 0 și de celelalte elemente frontieră ale suprafeței riemanniene R . Fie $\varepsilon_i = \min_{z \in \beta_i} G(z, 0)$. Din continuitatea funcției lui Green rezultă că pentru

orice $\varepsilon'_i < \varepsilon_i$ există cel puțin un punct din interiorul lui Δ_i în care $G(z, 0) = \varepsilon'_i$. Curba din linia de nivel $G(z, 0) = \varepsilon'_i$ care trece prin punctul respectiv nu poate tăia frontiera lui Δ_i deoarece $\varepsilon'_i < \min_{z \in \beta_i} G(z, 0)$ și nici nu se poate întretăia

pentru că atunci ar trebui să limiteze cel puțin un domeniu în care $G(z, 0)$ ar fi o constantă. Rezultă de aici că pentru orice, $\varepsilon'_i < \varepsilon_i$ există, complet inclusă în interiorul lui Δ_i o curbă simplă închisă din linia de nivel $G(z, 0) = \varepsilon'_i$ și numai una care înconjoară elementul de frontieră considerat. Pentru ε'_i fixați, fie $\varepsilon = \min_i \varepsilon'_i$. Fiecărui domeniu Δ_i îi corespunde o curbă simplă

închisă c_i din linia de nivel $G(z, 0) = \varepsilon$. Notez D_i domeniul inclus în Δ_i limitat de curba c_i și de elementul de frontieră considerat inițial.

Fie π domeniul poliedric compact din R limitat de curbele c și c_i ($i = 1, 2, \dots, h+k+l$). Conform principiului extremelor, în interiorul lui π $\varepsilon < G(z, 0) < M$. În interiorul domeniului d nu pot exista puncte în care $G(z, 0) < M$, căci acest fapt ar atrage după sine existența unor puncte de minim local al funcției lui Green. De asemenea în interiorul domeniilor D_i nu pot exista puncte în care $G(z, 0) > \varepsilon$, căci aceasta ar implica existența unor puncte de maxim local al funcției lui Green.

Rezultă că pentru λ suficient de mare linia de nivel $G(z, 0) = \lambda$ este o curbă simplă închisă care înconjoară punctul 0 și din continuitatea funcției lui Green rezultă că pentru λ tinzând la ∞ linia de nivel tinde către punctul 0.

De asemenea rezultă că pentru λ suficient de mic linia de nivel $G(z, 0) = \lambda$ este formată din $h+k+l$ curbe simple închise care înconjoară câte unul din elementele de frontieră $B_1, \dots, B_b, \gamma_1, \dots, \gamma_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l$ și pentru λ tinzând la zero fiecare din aceste curbe către tinde elementul de frontieră pe care îl înconjoară.

Deoarece liniile de nivel ale funcției lui Green nu se întretaie în interiorul domeniilor D_i , rezultă că funcția $F'(z)$ are toate zerourile sale în interiorul domeniului compact π , deci mulțimea acestor zerouri este finită.

Din continuitatea funcției lui Green dacă $h+k+l > 1$ rezultă existența punctelor de intersecție ale unei linii de nivel $G(z, 0) = \lambda_0$ care fac posibilă

descompunerea liniilor de nivel $G(z, 0) = \lambda < \lambda_0$ în mai multe curbe simple închise disjuncte. Existența punctelor de intersecție ale unei linii de nivel $G(z, 0) = \lambda_0$ care fac posibilă compunerea liniilor de nivel $G(z, 0) = \lambda < \lambda_0$ într-o curbă simplă închisă se poate dovedi prin exemplul următor:

Fie R un tor avînd ca frontieră o curbă C . Liniile de nivel ale funcției lui Green a suprafeței R relativă la un pol O trebuind să acopere întreaga suprafață R și neputînd limita un domeniu în care funcția lui Green să fie armonică, rezultă că va exista un punct A în care linia de nivel se descompune în două curbe simple închise și un punct B în care se compun două curbe simple închise într-o singură curbă simplă închisă, așa cum se vede din figura nr. 1, unde liniile de nivel $G(z, 0) = \lambda$ sînt desenate punctat.

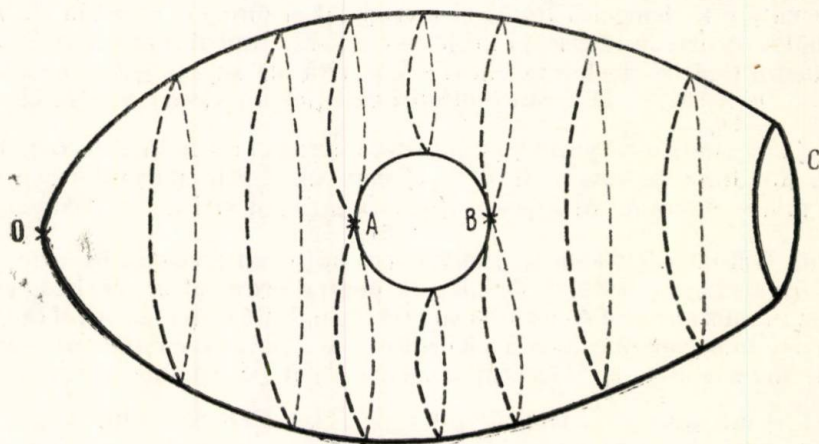


Fig. 1

Structura liniilor de nivel ale conjugatei armonice a funcției lui Green

Să considerăm din nou domeniul poliedric π de mai sus limitat de liniile de nivel $G(z, 0) = M$ și $G(z, 0) = \varepsilon$. Prin orice punct p de pe linia de nivel $G(z, 0) = M$ trece un arc simplu din linia de nivel $G(z, 0) = t$, unde t poate fi luat arbitrar deoarece conjugata armonică este determinată abstracție făcînd de o constantă aditivă. Dacă din p pornim dealungul liniei de nivel $G(z, 0) = t$ considerată în interiorul lui π , în acest sens de parcurs $G(z, 0)$ descrește. Se poate întîmpla să ajungem dealungul liniei de nivel $G(z, 0) = t$ pînă într-un punct de pe una din curbele $G(z, 0) = \varepsilon$ sau într-un punct z_1 care să fie zero al funcției $F'(z)$. În acest ultim caz, dacă z_1 este un zero de ordin k_1 al funcției $F'(z)$, prin z_1 trec $k_1 + 1$ arce simple din linia de nivel $G(z, 0) = t$. Se poate continua prelungirea arcului pz_1 considerat dealungul unui arc din linia $G(z, 0) = t$ astfel încît $G(z, 0)$ să continue să descrească. Deasemenea există posibilitatea ca prelungirea să se poată efectua pînă într-un punct din linia de nivel $G(z, 0) = \varepsilon$ sau să ajungem într-un punct z_2 care este zero al funcției $F'(z)$. În acest ultim caz repetăm procedeul folosit pentru punctul z_1 și

astfel, după un număr finit de alegeri de arce din linia de nivel $\overline{G(z, 0)} = t$, vom ajunge într-un punct din linia de nivel $G(z, 0) = \varepsilon$.

Să extragem din π toate liniile de nivel $\overline{G(z, 0)} = t$ care trec prin zerourile funcției $F'(z)$. În felul acesta linia de nivel $G(z, 0) = M$ s-a descompus într-un număr finit de intervale I , iar domeniul poliedric π s-a descompus într-un număr finit de domenii d care nu mai conțin în interiorul lor zerouri ale funcției $F'(z)$ și pentru fiecare din aceste domenii d se poate alege o ramură a funcției $\overline{G(z, 0)}$ uniformă în interiorul lui d . Să considerăm dintre domeniile d un domeniu d_0 pe a cărui frontieră se găsește un interval I_0 din linia de nivel $G(z, 0) = M$. O linie de nivel $\overline{G(z, 0)} = t$ care pornește dintr-un punct interior intervalului I_0 în sensul în care $G(z, 0)$ descreește trebuind să ajungă într-un punct de pe linia de nivel $G(z, 0) = \varepsilon$ rezultă că în domeniul d_0 funcția $G(z, 0)$ ia orice valoare cuprinsă între ε și M .

$$\text{Notăm } t_0 = \lim_{\substack{z \rightarrow \text{fr. } d_0 \\ z \in d_0}} \overline{G(z, 0)} \quad \text{și} \quad t'_0 = \lim_{\substack{z \rightarrow \text{fr. } d_0 \\ z \notin d_0}} \overline{G(z, 0)}$$

Intervalul I_0 poate fi orientat în sensul în care $\overline{G(z, 0)}$ crește și prin punctul inițial al lui I_0 va trece linia de nivel $\overline{G(z, 0)} = t_0$, iar prin punctul final al lui I_0 linia de nivel $\overline{G(z, 0)} = t'_0$. Orice linie de nivel $\overline{G(z, 0)} = t$ unde $t_0 < t < t'_0$ poate fi prelungită în sensul în care $G(z, 0)$ crește pînă în punctul 0, iar în sensul în care $G(z, 0)$ descreește pînă la frontiera suprafeței R . În felul acesta liniile de nivel considerate $\overline{G(z, 0)} = t$ ($t_0 < t < t'_0$) determină un domeniu D astfel încît pentru orice z din domeniul D avem relațiile:

$$0 < G(z, 0) < \infty \quad \text{și} \quad t_0 < \overline{G(z, 0)} < t'_0.$$

Am demonstrat astfel, cu notațiile de mai sus, următoarea

Teoremă: Orice domeniu D din suprafața riemanniană R a cărui frontieră conține punctul 0, liniile de nivel $\overline{G(z, 0)} = t_0$ și $\overline{G(z, 0)} = t'_0$, t_0 și t'_0 fiind constante reale și $t_0 < t'_0$, și sau un arc din bordul suprafeței R sau un element de frontieră ideală a lui R și care nu conține în interiorul său nici un zero al funcției $F'(z)$ este reprezentat conform prin funcția $w = F(z)$ pe domeniul

$$\{w | 0 < \text{Re } w < \infty, t_0 < \text{Im } w < t'_0\}$$

Observații: Fie N numărul zerourilor lui $F'(z)$, fiecare socotit de atîtea ori cît este ordinul său de multiplicitate.

Dacă genul g al suprafeței riemanniene R este zero, atunci $N = h + k + l - 1$.

Într-adevăr, din continuitatea funcției lui Green și din structura liniilor de nivel rezultă că $N \neq 0$. Dacă z_0 este un zero de ordin j al funcției $F'(z)$, se pot considera $j+1$ curbe simple închise din linia de nivel $G(z, 0) = G(z_0, 0)$, fiecare avînd proprietatea că separă anumite elemente frontieră ale suprafeței R de punctul 0 și fiecare element frontieră este separat de una din aceste curbe de punctul 0. Pentru ca fiecare din elementele frontieră ale suprafeței $R(B_1, \dots, B_h, \gamma_1, \dots, \gamma_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l)$ să fie separat de punctul 0 prin linii de nivel ale funcției lui Green, trebuie să existe atîtea zerouri ale funcției $F'(z)$ încît suma ordinelor lor de multiplicitate să fie $h + k + l - 1$. Avem deci

$N = h + k + l - 1$. Această relație este demonstrată de M. Morse ținând seama că funcția lui Green este o funcție pseudoarmonică.

Dacă genul g al suprafeței riemanniene R este diferit de zero, atunci $N = 2g + h + k + l - 1$.

Într-adevăr, în acest caz pe R se pot distinge g toarte de tor. Pentru fiecare toartă există linii de nivel $\bar{G}(z, 0) = \text{constant}$ care nu trec prin zerourile lui $F'(z)$ ce pornesc din punctul 0 și ajung pe frontiera suprafeței riemanniene R . Liniile de nivel $G(z, 0) = \lambda$ fiind ortogonale acestora, rezultă că pentru fiecare toartă există câte două zerouri de ordinul întâi ale funcției $F'(z)$ pentru care liniile de nivel corespunzătoare ale funcției lui Green nu contribuie la separarea elementelor frontieră de punctul 0. Deci în acest caz $N = 2g + h + k + l - 1$.

Această relație se mai poate stabili ținând seama că funcția $F'(z)$ este un covariant abelian pe suprafața riemanniană compactă constituită din domeniul poliedric π considerat mai sus, adică este un covariant analitic uniform și regulat abstracție făcând de poluri. Este deci valabilă formula $N - P = \rho$ unde N , respectiv P , reprezintă numărul zerourilor, respectiv al polilor, funcției $F'(z)$ de pe domeniul π , fiecare socotit de atâtea ori cât este ordinul său de multiplicitate, iar ρ este caracteristica domeniului π . Cum $\rho = 2g + h + k + l - 2$, iar $F'(z)$ are un singur pol de ordinul întâi în punctul 0 (deci $P = 1$), rezultă că $N = 2g + h + k + l - 2 + 1$. Deoarece numărul zerourilor funcției $F'(z)$ din domeniul π coincide cu cel din întreaga suprafață R , relația de mai sus este stabilită.

Dacă genul suprafeței riemanniene R este infinit, funcția $F'(z)$ are o infinitate de zerouri și deci liniile de nivel ale funcției lui Green se vor intersecta într-o infinitate de puncte, descompunându-se sau compunându-se încontinuu.

§ 2. Să notăm în acest paragraf domeniile ce satisfac condițiile din teorema din paragraful precedent cu D , respectiv D' , după cum frontierele lor conțin un arc din bordul suprafeței R , respectiv un element de frontieră ideală.

Să considerăm o reprezentare a suprafeței riemanniene R pe suprafața riemanniană R^* definită de funcția $z^* = f(z)$, olomoră pe R . Fie $0^* = f(0)$, $G(z^*, 0^*)$ funcția lui Green a suprafeței R^* în raport cu polul 0^* și $\bar{G}(z^*, 0^*)$ conjugata armonică a acestei funcții. Notăm $\bar{G}(z^*, 0^*) = \bar{G}[f(z), f(0)] = \bar{G}^*(z, 0)$.

Pentru orice domeniu D , respectiv D' , se poate considera un alt domeniu D , respectiv D' , pe a cărui frontieră se găsesc liniile de nivel $\bar{G}(z, 0) = a$ și $\bar{G}(z, 0) = b$, cu $t_0 \leq a < b \leq t'_0$, dar avînd în plus proprietatea că domeniului $f(D)$, respectiv $f(D')$, îi corespunde o ramură uniformă a funcției $\bar{G}(z^*, 0^*)$; notăm aceste domenii cu $\mathfrak{D}$, respectiv $\mathfrak{D}'$. Putem presupune că pe frontiera lui $\mathfrak{D}$, respectiv $\mathfrak{D}'$, se găsesc liniile de nivel $\bar{G}(z, 0) = 0$ și $\bar{G}(z, 0) = \mu$ (evident $\mu = b - a$).

Să presupunem că funcția $F(z)$ satisface condiția

(1) imaginea liniei de nivel $\bar{G}(z, 0) = 0$ prin funcția $z^* = f(z)$ este linia de nivel $\bar{G}(z^*, 0^*) = 0$.

Pentru domeniul $\mathfrak{D}$ să presupunem în plus că funcția $f(z)$ satisface condiția (2) transformă punctele z de pe bordul suprafeței R ce se găsesc pe frontiera lui $\mathfrak{D}$ în puncte de pe bordul suprafeței R^* ce se găsesc pe frontiera domeniului $f(\mathfrak{D})$ astfel încît $|\overline{G^*(z, 0)} - \overline{G(z, 0)}| < m$ unde $0 < m < M$ cu

$$M = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in \mathfrak{D}}} |\overline{G^*(z, 0)} - \mu|$$

$$\overline{G(\zeta, 0)} = \mu$$

Relativ la domeniul $\mathfrak{D}$ putem aplica principiul extremelor generalizat funcției armonice $\overline{G^*(z, 0)} - \overline{G(z, 0)}$, mulțimea excepțională fiind punctul 0.

Pentru z aparținând liniei de nivel $\overline{G(z, 0)} = 0$ avem $\overline{G^*(z, 0)} - \overline{G(z, 0)} = 0$ pentru z aparținând liniei de nivel $\overline{G(z, 0)} = \mu$ avem $|\overline{G^*(z, 0)} - \overline{G(z, 0)}| \leq M$, iar pentru punctele z din bordul lui R ce se găsesc pe frontiera domeniului $\mathfrak{D}$ avem $|\overline{G^*(z, 0)} - \overline{G(z, 0)}| < m < M$.

Rezultă că pentru orice z dintr-un domeniu $\mathfrak{D}$, dacă $z^* = f(z)$ este o funcție olomoră pe R , care îndeplinește condițiile (1) și (2), avem satisfăcută relația

$$|\overline{G^*(z, 0)} - \overline{G(z, 0)}| \leq M$$

(cu notațiile de mai sus). Egalitatea într-un punct interior domeniul $\mathfrak{D}$ atrage după sine egalitatea în tot domeniul $\mathfrak{D}$.

Pentru domeniul $\mathfrak{D}'$ să presupunem în plus că funcția $f(z)$ satisface condiția (2') atunci când z din domeniul $\mathfrak{D}'$ tinde către frontiera ideală a suprafeței R , $\overline{G^*(z, 0)}$ tinde către $\overline{G(z, 0)}$, adică pentru orice $\varepsilon > 0$, există un domeniu Δ dintr-un șir determinant al elementului de frontieră ideală considerat, astfel încît pentru orice $z \in \Delta \cap \mathfrak{D}'$ $|\overline{G^*(z, 0)} - \overline{G(z, 0)}| < \varepsilon$.

Fie γ frontiera lui Δ ce se găsește în interiorul domeniului $\mathfrak{D}'$ și $\mathfrak{D}'_1$, intersecția exteriorului lui Δ cu domeniul $\mathfrak{D}'$. Relativ la domeniul $\mathfrak{D}'_1$, putem aplica deasemeni principiul maximului generalizat funcției $\overline{G^*(z, 0)} - \overline{G(z, 0)}$.

Fie $M = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in \mathfrak{D}'}} |\overline{G^*(z, 0)} - \mu|$.

$$\overline{G(\zeta, 0)} = \mu$$

Pentru z aparținând liniei de nivel $\overline{G(z, 0)} = 0$ avem $\overline{G^*(z, 0)} - \overline{G(z, 0)} = 0$ pentru z aparținând liniei de nivel $\overline{G(z, 0)} = \mu$ avem $|\overline{G^*(z, 0)} - \overline{G(z, 0)}| \leq M$, iar pentru z aparținând lui γ $|\overline{G^*(z, 0)} - \overline{G(z, 0)}| < \varepsilon$. Este suficient să luăm $\varepsilon < M$ și pentru orice $z \in \mathfrak{D}'_1$ avem relația $|\overline{G^*(z, 0)} - \overline{G(z, 0)}| \leq M$.

Cum și în $\mathfrak{D}' \cap \Delta$ avem $|\overline{G^*(z, 0)} - \overline{G(z, 0)}| < \varepsilon < M$, rezultă că pentru orice z dintr-un domeniu $\mathfrak{D}'$ dacă $z^* = f(z)$ este o funcție olomoră pe R , care îndeplinește condițiile (1) și (2'), avem satisfăcută relația

$$|\overline{G^*(z, 0)} - \overline{G(z, 0)}| \leq M$$

(cu notațiile de mai sus), egalitatea într-un punct interior atrăgînd după sine egalitatea în tot domeniul $\mathfrak{D}'$.

II. Să presupunem acum că suprafața riemanniană R are frontiera de măsură armonică nulă și genul g finit.

Fie $z = \zeta$ un punct fix al suprafeței R și $K_\zeta: |z - \zeta| \leq 1$ un disc parametric fix pe R . Să considerăm o exhaustiune a lui R cu domenii relativ compacte R_n conținând discul K_ζ și satisfăcând, pe lângă condițiile obișnuite ($R = \bigcup R_n$, $R_n \subset R_{n+1}$, $\beta_n \cap \beta_{n+1} = 0$) și următoarea condiție: frontiera β_n a lui R_n este constituită dintr-un număr finit de curbe simple închise analitice β_{ni} și fiecare β_{ni} divide R în două părți disjuncte dintre care cea conținută în $R - R_n$ nu e compactă. Notăm cu β frontiera suprafeței R . Să considerăm un element de frontieră ideală γ a lui R și fie γ_n curba β_{ni} care separă elementul γ de discul K_ζ .

Să considerăm, după L. Sario, funcția $t_n = t_n(z, \zeta)$ unic determinată prin condițiile:

1. t_n este armonică peste tot pe R_n în afară de punctul $z = \zeta$ iar în discul K_ζ $t_n = 1n |z - \zeta| + \langle z - \zeta \rangle$ unde $\langle z - \zeta \rangle$ este o funcție armonică de z și nulă pentru $z = \zeta$

$$2. \int_{\gamma_n} d\bar{t}_n = 2\pi \text{ și } \int_{\beta_{ni}} d\bar{t}_n = 0 \text{ pentru orice } \beta_{ni} \neq \gamma_n$$

3. pe curbele frontieră ale lui R_n funcția t_n ia valorile constante $k_{\beta_{ni}}$.

Dacă se notează $k_{\gamma_n} = k_n$ avem $k_{\beta_{ni}} < k_n$ pentru orice $\beta_{ni} \neq \gamma_n$ și deci pe R_n $t_n < k_n$. Șirul $\{k_n\}$ este crescător și are o limită $k_\gamma \leq \infty$. În cazul $k_\gamma < \infty$ șirul $\{t_n\}$ este convergent către o funcție limită $t_\gamma(z, \zeta)$, armonică peste tot pe R în afară de punctul $z = \zeta$ unde $t_\gamma = 1n |z - \zeta| + \langle z - \zeta \rangle$. Dacă $k_\gamma = \infty$ există un subșir al lui $\{t_n\}$ care are această proprietate, așa că în orice caz funcția limită (sau o funcție limită) $t_\gamma(z, \zeta)$ este definită.

Din funcția lui Sario t_γ se poate obține un fel de funcție a lui Green a suprafeței R pentru elementul frontieră γ . Într-adevăr, dacă se notează $g_n(z, \zeta) = k_n - t_n(z, \zeta)$, dacă $k_\gamma < \infty$ șirul $\{g_n(z, \zeta)\}$ converge către o funcție limită $g_\gamma(z, \zeta) = k_\gamma - t_\gamma(z, \zeta)$ cu proprietățile:

1. $g_\gamma(z, \zeta)$ este armonică peste tot pe R în afară de punctul $z = \zeta$ unde $g_\gamma(z, \zeta) = 1n \frac{1}{|z - \zeta|} + k_\gamma + \langle z - \zeta \rangle$

2. $g_\gamma(z, \zeta) > 0$ peste tot pe R

3. $g_\gamma(z, \zeta) = g_\gamma(\zeta, z)$

Toate acestea sînt proprietățile esențiale ale funcției lui Green $G(z, \zeta)$ a suprafeței riemanniene R în raport cu polul $z = \zeta$. De aceea funcția $g_\gamma(z, \zeta)$ se numește funcția lui Green a suprafeței riemanniene R pentru elementul de frontieră γ . Dacă $\beta = \gamma$ adică suprafața R are un singur element frontieră, $g_\gamma(z, \zeta)$ se reduce la funcția lui Green $G(z, \zeta)$.

Dacă $k_\gamma = \infty$, șirul $\{g_n(z, \zeta)\}$ converge uniform pe R către ∞ . Din proprietățile 1. și 2. ale funcției $g_\gamma(z, \zeta)$ rezultă că $G(z, \zeta) \leq g_\gamma(z, \zeta)$ pentru orice γ , ceea ce arată că inexistența pe R a funcției $G(z, \zeta)$ implică pe aceea a lui $g_\gamma(z, \zeta)$ pentru orice γ .

Deoarece acum ne ocupăm de suprafețele riemanniene care nu posedă funcția lui Green, avem $k_\gamma = \infty$. Pentru simplificare să presupunem $\zeta = 0$.

Considerăm deci funcții t_n cu proprietățile:

1. t_n este armonică pe R_n în afară de $z=0$, iar în discul $|z| \leq 1$ $t_n = 1n |z| + \langle z - 0 \rangle$ unde $\langle z - 0 \rangle$ este o funcție armonică de z și nulă pentru $z = 0$

2. $\int_{\gamma_n} d\bar{t}_n = 2\pi$ și $\int_{\beta_{ni}} d\bar{t}_n = 0$ pentru orice $\beta_{ni} \neq \gamma_n$.

3. pe curbele frontieră ale lui R_n funcția t_n ia valorile constante $k_{\beta_{ni}}$

Avem $k_{\beta_{ni}} < k_{\gamma_n} = k_n$ și $k_n \rightarrow k_\gamma = \infty$.

Fie $t_\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n \cdot t_\gamma$ este armonică peste tot pe R în afară de $z = 0$ unde

$$t_\gamma = \ln |z| + \langle z-0 \rangle.$$

Funcția $t_\gamma = t_\gamma(z, 0)$ tinde către $-\infty$ când $z \rightarrow 0$ și către $+\infty$ când z tinde către elementul de frontieră γ . Când z tinde către un element de frontieră $\beta_i \neq \gamma$ funcția t_γ tinde către o valoare $k_{\beta_i} \leq \infty$.

§ 3. Raționamente analoge cu cele făcute relativ la funcția lui Green și la conjugata acestei funcții în cazul suprafețelor riemanniene cu măsura armonică pozitivă, ne conduc la următoarele rezultate:

Funcția $s(z) = t_\gamma + i\bar{t}_\gamma$ unde $\bar{t}_\gamma$ este conjugata armonică a funcției t_γ mijlocește o reprezentare conformă în jurul fiecărui punct $z \in R - 0$ în care $s'(z) \neq 0$, deci printr-un asemenea punct trece o linie de nivel $t_\gamma = \lambda$ și o linie de nivel $\bar{t}_\gamma = \mu$ ortogonală la prima, formate fiecare în vecinătatea punctului respectiv din arce simple analitice. Dacă într-un punct $z \in R - 0$ $s'(z)$ are un zero de ordin k , prin acest punct trec $k+1$ ramuri diferite ale unei linii $t_\gamma = \lambda$ și $k+1$ ramuri diferite ale unei linii $\bar{t}_\gamma = \mu$, acestea fiind așezate alternativ, deci și acum mulțimea de puncte $t_\gamma = \lambda$ sau $\bar{t}_\gamma = \mu$ este formată din curbe. Zerourile funcției $s'(z)$ deasemenea formează o mulțime izolată de puncte pe R . Exceptînd valorile λ corespunzătoare acestor puncte, liniile de nivel $t_\gamma = \lambda$ vor fi niște curbe simple închise disjuncte care nu pot limita un domeniu în care t_γ să fie armonică. Deci domeniile limitate de liniile de nivel $t_\gamma = \lambda$ sau vor cuprinde în interiorul lor punctul 0, sau pot constitui frontiere pentru domenii ce pot forma șiruri determinante ale elementelor de frontieră γ sau β_i . Pentru λ suficient de mic tinzînd către $-\infty$ liniile de nivel $t_\gamma = \lambda$ sînt formate din curbe simple închise ce se apropie de punctul 0, iar pentru λ suficient de mare tinzînd către $+\infty$ liniile de nivel $t_\gamma = \lambda$ sînt formate din curbe simple închise disjuncte ce pot forma frontiere de domenii din șiruri determinante ale elementelor de frontieră ideală ale suprafeței R .

Liniile de nivel $\bar{t}_\gamma = \mu$ vor fi acum formate din arce ce pornesc din punctul 0 și ajung fie într-un zero al funcției $s'(z)$, fie se apropie indefinit de unul din elementele de frontieră ideală ale suprafeței R .

Dacă extragem din R liniile de nivel $\bar{t}_\gamma = \mu$ care trec prin zerourile funcției $s'(z)$, printre domeniile ce se formează astfel se pot considera domenii cărora să le spunem Δ , a căror frontieră este formată din două linii de nivel $\bar{t}_\gamma = t_0$ și $\bar{t}_\gamma = t'_0$ (fie $t_0 < t'_0$), punctul 0 și elementul de frontieră ideală γ și cărora le corespund ramuri uniforme ale funcției $\bar{t}_\gamma$. Un asemenea domeniu este reprezentat conform prin funcția $w = s(z) = t_\gamma + i\bar{t}_\gamma$ pe domeniul

$$\{w \mid -\infty < \operatorname{Re} w < +\infty, t_0 < \operatorname{Im} w < t'_0\}$$

§ 4. Să considerăm acum o reprezentare a suprafeței riemanniene R pe suprafața riemanniană R^* , definită de funcția $z^* = f(z)$ care este olomorfă

în Δ . Notăm $0^* = f(0)$. Fie $\gamma^* = f(\gamma)$, înțelegînd prin aceasta că domenii ce formează un șir determinant al elementului de frontieră γ au ca imagini prin funcția $f(z)$ domenii ce formează un șir determinant al unui element de frontieră γ^* .

Fie $t_{\gamma^*}(z^*, 0^*)$ funcția lui Sario pentru suprafața riemanniană R^* și $\overline{t_{\gamma^*}}(z^*, 0^*)$ conjugata acestei funcții. Notăm $\overline{t_{\gamma^*}}(z^*, 0^*) = \overline{t_{f(\gamma)}}(f(z), f(0)) = \overline{t_{\gamma}^*}(z, 0)$. Pentru orice domeniu Δ se poate considera un domeniu Δ' inclus în cel inițial, avînd proprietățile lui Δ și în plus proprietatea că domeniului $f(\Delta')$ îi corespunde o ramură uniformă a funcției $\overline{t_{\gamma^*}}(z^*, 0^*)$. Deoarece funcția $\overline{t_{\gamma}}(z, 0)$ este determinată abstracție făcînd de o constantă aditivă, putem presupune că pe frontiera lui Δ' se găsesc liniile de nivel $\overline{t_{\gamma}} = 0$ și $\overline{t_{\gamma}} = \mu$ ($\mu > 0$).

Să presupunem că funcția $z^* = f(z)$ este continuă pe linia de nivel $\overline{t_{\gamma}} = 0$ și transformă punctele ζ pentru care $\overline{t_{\gamma}}(\zeta, 0) = 0$ în puncte ζ^* pentru care $\overline{t_{\gamma^*}}(\zeta^*, 0^*) = 0$.

Dacă $z^* = f(z)$ este o funcție olomorfa în Δ' , continuă pe linia de nivel $\overline{t_{\gamma}} = 0$ și care transformă punctele de pe linia de nivel $\overline{t_{\gamma}}(z, 0) = 0$ în puncte de pe linia de nivel $\overline{t_{\gamma^*}}(z^*, 0^*) = 0$ unde $0^* = f(0)$ și $\gamma^* = f(\gamma)$, pentru orice $z \in \Delta'$ avem satisfăcută relația

$$|\overline{t_{\gamma}^*}(z, 0) - \overline{t_{\gamma}}(z, 0)| \leq M,$$

unde $\overline{t_{\gamma}^*}(z, 0) = \overline{t_{f(\gamma)}}(f(z), f(0))$, iar $M = \lim_{\substack{z \in \Delta' \\ z \rightarrow \zeta \\ \overline{t_{\gamma}}(\zeta, 0) = \mu}} |\overline{t_{\gamma}^*}(z, 0) - \mu|$

Demonstrație: Să considerăm funcția $h(z)$ definită astfel: $h(z) = \overline{t_{\gamma}^*}(z, 0) - \overline{t_{\gamma}}(z, 0)$ pentru orice $z \in \Delta'$ și pentru orice $z = \zeta$ unde $\overline{t_{\gamma}}(\zeta, 0) = \mu$ și $h(z) = 0$ pentru $z = 0$ și pentru orice $z = \zeta'$ unde $\overline{t_{\gamma}}(\zeta', 0) = 0$. Funcția $h(z)$ este o funcție armonică, uniformă și mărginită în Δ (mărginirea rezultă din proprietatea 2. a funcției lui Sario și din alegerea făcută pentru funcțiile $\overline{t_{\gamma}^*}(z, 0)$ și $\overline{t_{\gamma}}(z, 0)$ în Δ'), deci pentru această funcție se poate aplica principiul maximului în domeniul Δ' , domeniu cu frontieră nevidă din suprafața riemanniană R cu frontiera de măsură armonică nulă.

Să notăm $A = \lim_{\substack{z \in \Delta' \\ z \rightarrow \zeta \\ \overline{t_{\gamma}}(\zeta, 0) = \mu}} \overline{t_{\gamma}^*}(z, 0)$ și $B = \lim_{\substack{z \in \Delta' \\ z \rightarrow \zeta' \\ \overline{t_{\gamma}}(\zeta', 0) = 0}} \overline{t_{\gamma}^*}(z, 0)$

Dacă $\mu \leq B \leq A$ atunci $0 \leq h(z) \leq A - \mu$, dacă $B \leq \mu \leq A$ atunci $B - \mu \leq h(z) \leq A - \mu$, iar dacă $B \leq A \leq \mu$ atunci $B - \mu \leq h(z) \leq 0$ deci în orice caz $|h(z)| \leq M$ unde $M = \lim_{\substack{z \in \Delta' \\ z \rightarrow \zeta \\ \overline{t_{\gamma}}(\zeta, 0) = \mu}} |\overline{t_{\gamma}^*}(z, 0) - \mu|$

pentru orice z din Δ' .

Dar pentru z din Δ' , $h(z) = \overline{t_{\gamma}^*}(z, 0) - \overline{t_{\gamma}}(z, 0)$, deci demonstrația este terminată.

§ 5. Aplicații

Dacă R este planul euclidian iar 0 este originea axelor de coordonate, funcția lui Sario este $\ln |z|$, conjugata acestei funcții $\overline{t_{\gamma}}(z, 0) = \arg z$, $\overline{t_{\gamma}^*}(z, 0) =$

$= \arg f(z)$, domeniul Δ' se reduce la un unghi $0 < \arg z < \theta < 2\pi$ și avem pentru orice z din interiorul acestui unghi

$$|\arg f(z) - \arg z| \leq M \text{ unde } M = \lim_{\substack{z \rightarrow \rho e^{i\theta} \\ 0 < \rho < \infty}} |\arg f(z) - \theta|$$

pentru orice $f(z)$ funcție olomorfa în unghiul considerat, continuă, reală și pozitivă pentru z real și pozitiv, adică tocmai principiul lui Stoilow.

BIBLIOGRAFIE

1. L. Ahlfors and L. Sario: „Riemann surfaces“ Princeton 1960
2. C. Andreian Cazacu: „Proprietăți de acoperire ale suprafețelor riemanniene“, *Analele științifice ale Universității Al. I. Cuza din Iași*, tom. VI, fasc. 3, 1960
3. C. Anghel: „Asupra unei metode extremale a lui S. Stoilow“, *Comunicările Acad. RPR* anul XIII (1963), nr. 5 (mai)
4. M. Jurchescu: „Suprafețe riemanniene cu frontieră absolut discontinuă“, teză de candidat, București 1956
5. M. Morse: „Topological methods in the theory of functions of a complex variable“ Princeton 1947
6. R. Nevanlinna: „Eindeutige analytische Funktionen“, Berlin 1953
7. R. Nevanlinna: „Uniformisierung“, Berlin 1953
8. K. Noshiro: „Cluster sets“, Berlin 1960
9. A. Pfluger: „Theorie der Riemannschen Flächen“, Berlin 1957
10. S. Stoilow în colaborare cu C. Abăilescu: „Teoria funcțiilor de o variabilă complexă“, vol. II, București 1958
11. S. Stoilow: „Observații asupra principiului extremelor și a aplicațiilor sale în teoria funcțiilor“, *Acad. RPR Filiala Iași, Studii și cercetări* anul VI- 1955, nr. 1—2
12. Ec. Vișinescu: „Suprafețe riemanniene bordate normal exhaustibile“, *Analele Universității București, seria Științelor Naturii, Matematică-Fizică*, nr. 39, anul XII

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОДНОГО ПРИНЦИПА СТОИЛОВА НА РИМАННОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Рассматриваются сначала римановы поверхности положительной гармонической меры и исследуется структура линий уровня функции Грина и её сопряжённой. Отмечаются некоторые факты о числе нулей производной аналитической функции, действительной частью которой является функция Грина римановой поверхности. Принцип Стоилова распространяется на сопряжённую для функции Грина функцию. Далее рассматриваются римановы поверхности, граница которых имеет нулевую гармоническую меру. Исследуется структура линий уровня функции Сарио и её сопряжённой. Принцип Стоилова распространяется на сопряжённую для функции Сарио функцию; показывается, что отсюда можно получить принцип Стоилова для аргументов.

EXTENSION OF A STOILOW'S PRINCIPLE TO RIEMANN SURFACES

ABSTRACT

In this paper we consider the Riemann surfaces with the positive harmonic measure and we analyse the structure of the contour lines for the Green's function and for its conjugate function. We make some remarks concerning the number of nulls of the function $F'(z)$, where $F(z)$ is the analytic function with Green's function as its real part. We extend Stoilow's principle for the conjugate function of Green's function.

Then we consider the Riemann surfaces with null harmonic measure and we analyse the structure of the contour lines for the Sario's function and for its conjugate function. After that we extend Stoilow's principle for the conjugate function of Sario's function. Hence Stoilow's principle for arguments results as a particular case.

Volume 100, No. 1, January 1955
Published by the American Medical Association, 535 North Dearborn Street, Chicago 10, Ill.
Subscription price, \$5.00 per annum in advance. Single copies, 15¢.

Entered as Second-Class Matter, May 2, 1917. Postage paid at Chicago, Ill., and at additional mailing offices.
Acceptance for mailing at special rate of postage provided for in Section 1103, Act of October 3, 1917.
Copyright, 1955, by American Medical Association

Printed at the American Medical Association Press, Chicago, Ill.

Second-class postage paid at Chicago, Ill., and at additional mailing offices.

Postmaster: Send address changes in this journal to THE JOURNAL OF THE AMERICAN MEDICAL ASSOCIATION, 535 North Dearborn Street, Chicago 10, Ill.

Subscription orders, notices of change of address, and all correspondence should be sent to the Editor, The Journal of the American Medical Association, 535 North Dearborn Street, Chicago 10, Ill.

Reprints of articles in this journal may be obtained from the American Medical Association, 535 North Dearborn Street, Chicago 10, Ill.

Advertising rates and other information may be obtained from the American Medical Association, 535 North Dearborn Street, Chicago 10, Ill.

Claims for missing issues will only be considered if made immediately on receipt of following issue.

Claims for missing issues will only be considered if made immediately on receipt of following issue.

Claims for missing issues will only be considered if made immediately on receipt of following issue.

Claims for missing issues will only be considered if made immediately on receipt of following issue.

Claims for missing issues will only be considered if made immediately on receipt of following issue.

Claims for missing issues will only be considered if made immediately on receipt of following issue.

Claims for missing issues will only be considered if made immediately on receipt of following issue.

Claims for missing issues will only be considered if made immediately on receipt of following issue.

Claims for missing issues will only be considered if made immediately on receipt of following issue.

Claims for missing issues will only be considered if made immediately on receipt of following issue.

Claims for missing issues will only be considered if made immediately on receipt of following issue.

Claims for missing issues will only be considered if made immediately on receipt of following issue.

Claims for missing issues will only be considered if made immediately on receipt of following issue.

APLICAȚII ALE METODEI POLIGONULUI FUNICULAR ÎN CALCULUL GRAFIC

L. CHIOSA, T. POSTELNICU și N. BONCIOCAT

În prelucrarea unor date experimentale la Institutul pentru Controlul de Stat al Medicamentului și Cercetări Farmaceutice a apărut necesitatea utilizării unor metode grafice de calcul care să rezolve cu succes probleme ca: integrarea și derivarea grafică, interpolarea cu noduri echidistante, calculul abaterii standard etc. Pentru aceasta am căutat să folosim în locul metodelor cunoscute, o metodă unitară valabilă tuturor problemelor menționate. Deoarece aceste probleme se reduc la calculul unor medii ponderate, ne-am oprit asupra metodei poligonului funicular din mecanica clasică.

Analiza acestei metode a permis interpretarea ei ca o funcțională liniară continuă pe un anumit spațiu X , justificându-se astfel marea ei generalitate. În această notă vom prezenta această interpretare, precum și aplicațiile metodei la integrarea grafică.

Se știe că fiind date n forțe F_i ($i = 1, 2, \dots, n$) cu punctele de aplicație $A_i(x_i)$ situate de-a lungul unei drepte luată ca axă x , centrul C al acestor forțe paralele este un punct situat tot pe axa x de abscisă

$$x = \frac{\sum_i F_i x_i}{\sum_i F_i} \quad (1)$$

care se determină cu ajutorul metodei poligonului funicular.

Formula (1) sugerează interpretarea metodei poligonului funicular ca o funcțională liniară continuă pe spațiul liniar X al sistemelor ordonate de n numere reale organizat ca spațiu normat prin introducerea normei $\|x\| = \max |x_i|$ adunarea și înmulțirea cu numere reale în cadrul spațiului făcându-se în modul obișnuit, adică pe componente.

Într-adevăr, operatorul „metoda poligonului funicular” este determinat o dată cu sistemul ordonat de n numere reale $(F_1, F_2, \dots, F_n)$, iar faptul că este un operator liniar se vede imediat din forma relației (1). Continuitatea operatorului rezultă pe baza aceleiași relații (1) și a normei introduse în spațiul X . În plus, rezultatul aplicării operatorului, fiind un număr real, el este de fapt o funcțională liniară reală, continuă pe spațiul liniar real normat X .

Să stabilim acum condițiile în care o funcțională reală liniară și continuă pe spațiul liniar real normat X , poate fi adusă la forma (1), adică

liniară și continuă pe spațiul linear normat X' al sistemelor ordonate de $n+1$ numere reale $X' = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, 0)\}$ cu păstrarea valorii în punctele corespundente $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ și $(x_1, x_2, \dots, x_n, 0)$ și satisfăcând egalitatea $\sum_{i=1}^{n+1} a_i = 1$.

Într-adevăr este suficient pentru aceasta să luăm

$$\varphi(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + (1-C) \cdot 0.$$

Pe baza acestei observații rezultă următorul

Corolar: Metoda poligonului funicular se poate aplica la calculul grafic al valorii oricărei funcționale liniare continue pe spațiul liniar normat real al sistemelor ordonate de n numere reale, cu norma dată de $\|x\| = \max |x_i|$.

Întrucît în practica calculului numeric se întîlnesc foarte des astfel de funcționale, ele aproximînd de obicei diverse alte mărimi, metoda poligonului funicular devine o metodă de calcul grafic cu totul deosebită și generală.

Se lărgeste și mai mult cîmpul de aplicare al metodei, dacă se folosesc în locul scărilor uniforme de pe cele două axe, diverse alte scări funcționale. Astfel, dacă scara uniformă de pe axa x se înlocuiește cu una funcțională $f(x)$, iar cea de pe axa y cu una $g(y)$, putem cu ajutorul relației:

$$f(\lambda) = \sum_i g(y_i) \cdot f(x_i) / \sum_i g(y_i) \quad (4)$$

să determinăm valoarea lui λ pe cale grafică.

Se știe că pentru calculul integralelor definite, cînd integrala nedefinită nu poate fi obținută prin cuadraturi elementare, se folosesc formule de aproximație. Aceste formule sînt de tipul (3), ceea ce face din metoda poligonului funicular, o metodă de calcul aproximativ al integralelor definite, pe cale grafică, cu totul general. Să considerăm cazurile cunoscute ale formulelor de integrare aproximativă:

a) În cazul formulelor Newton-Cotes se urmărește aproximarea integralelor definite prin expresii de tipul

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n \alpha_i^{(n)} f(x_i) \quad (5)$$

în care

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

iar $\alpha_i^{(n)}$ se determină astfel încît pentru orice polinom $P(x)$ de grad cel mult n să aibă loc egalitatea

$$\int_a^b P(x) dx = \sum_{i=0}^n \alpha_i^{(n)} P(x_i) \quad (6)$$

Egalitatea (6) trebuie să aibă loc și pentru $P(x) = 1$ și deci rezultă

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b dx = \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^n \alpha_i^{(n)} = \sum_{i=0}^n \alpha_i^{(n)} = 1; \quad \alpha_i^{(n)} = \frac{\alpha_i^{(n)}}{b-a} \quad (7)$$

ceea ce ne arată că metoda poligonului funicular se poate aplica cu succes la determinarea pe cale grafică a integralei.

Determinarea coeficienților $\alpha_i^{(n)}$ în funcție de numărul de noduri ales conduce la formulele clasice de integrare numerică. Astfel, pentru $n = 1$ avem formula întâia a trapezului

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \simeq \frac{1}{2k} [f(a) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{k-1}) + f(b)] \quad (8)$$

în care caz aplicarea metodei poligonului funicular se va face luînd pentru lungimile segmentelor din poligonul forțelor valorile 1,2,2,...2,1. Aceasta rezultă din faptul că comparația formulei (8) cu relația (3) ne dă:

$$a_1 = 1/2k, a_2 = 1/k, \dots, a_k = 1/k, a_{k+1} = 1/2k$$

și deci condiția (2) este satisfăcută.

Analog pentru $n = 2$ obținem formula lui Simpson:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \simeq \frac{1}{6k} & \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+x_1}{2}\right) + 2f(x_1) + 4f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \right. \\ & \left. + 2f(x_2) + \dots + 4f\left(\frac{x_{k-1}+b}{2}\right) + f(b) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

unde

$$\begin{aligned} a_1 = a_{2k+1} = 1/6k, a_{2i} = 2/3k, a_{2i+1} = 1/3k \\ (i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, k-1) \end{aligned}$$

iar pentru lungimile segmentelor din poligonul forțelor avem astfel valorile 1,4,2,4,2,...2,4,1.

Pentru $n = 3$ se obține formula lui Newton și procedînd ca mai sus rezultă pentru lungimile segmentelor din poligonul forțelor valorile 1,3,3,2,3,3,2,3,3,...2,3,3,1.

b) Formula generală (5) de calcul aproximativ al unei integrale definite conține $2n$ mărimi arbitrare. Cerînd ca relația (6) să se transforme într-o egalitate strictă pentru polinoame de grad cel mult $2n - 1$, se pot determina cele $2n$ mărimi. În final se ajunge la o formulă de tipul

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=1}^n \alpha_i'^{(n)} f(X_i), X_i = a + (b-a) x_i \quad (10)$$

care ne conduce la formulele de integrare numerică ale lui Gauss. Valorile x_i și coeficienții $\alpha_i'^{(n)}$ sînt trecuți în tabele și avem

$$\alpha_i'^{(n)} = \frac{\alpha_i^{(n)}}{b-a}, \sum_{i=1}^n \alpha_i'^{(n)} = 1$$

ceea ce face ca metoda poligonului funicular să se poată aplica la oricare din formulele lui Gauss. În practică se folosește în deosebi formula pentru $n = 1$ cunoscută sub numele de a doua formulă a trapezului:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \simeq \frac{1}{k} [f(x_1) + \dots + f(x_k)] \quad (11)$$

În acest caz $a_i = 1/k$, iar valorile pentru lungimile segmentelor din poligonul forțelor sînt $1, 1, 1, \dots, 1, 1$.

c) În cazul utilizării formulei lui Cebîșev

$$\int_a^b f(x) dx \simeq (b-a) C_n [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)] \quad (12)$$

urmează să se determine valorile absciselor și coeficientului C_n din condiția ca relația (12) să se transforme într-o egalitate strictă pentru polinoame de grad cel mult n . În cele din urmă se obține

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \simeq \frac{1}{n} [f(X_1) + f(X_2) + \dots + f(X_n)]; X_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x_i$$

valorile x_i găsindu-se în tabele în funcție de numărul ordonatelor iar valorile pentru lungimile segmentelor din poligonul forțelor fiind de asemenea $1, 1, 1, \dots, 1$.

Faptul că metoda poligonului funicular permite calcularea pe cale grafică a integralelor definite, oricare ar fi formula de aproximare folosită, are o deosebită importanță, deoarece precizia cu care se determină valoarea integralei depinde de formula de aproximare folosită.

BIBLIOGRAFIE

1. A. N. Krîlov: Lecții de calcule prin aproximații, Editura tehnică, 1957
2. N. Teodorescu: Calculul numeric și grafic, Institutul Politehnic, București, 1951
3. D. V. Ionescu: Cuadraturi numerice, Editura Tehnică, 1957
4. Bal. Lascu: Francisc Rado: Lecții de nomografie, Editura Tehnică, 1957
5. M. V. Pentcovski: Nomograme, Editura tehnică, 1956
6. A. G. Worthing: J. Geffner: Prelucrarea datelor experimentale, Editura tehnică, 1959.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВЕРЁВОЧНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА К ГРАФИЧЕСКОМУ РАСЧЁТУ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Метод верёвочного многоугольника из классической механики применяется как линейный непрерывный функционал.

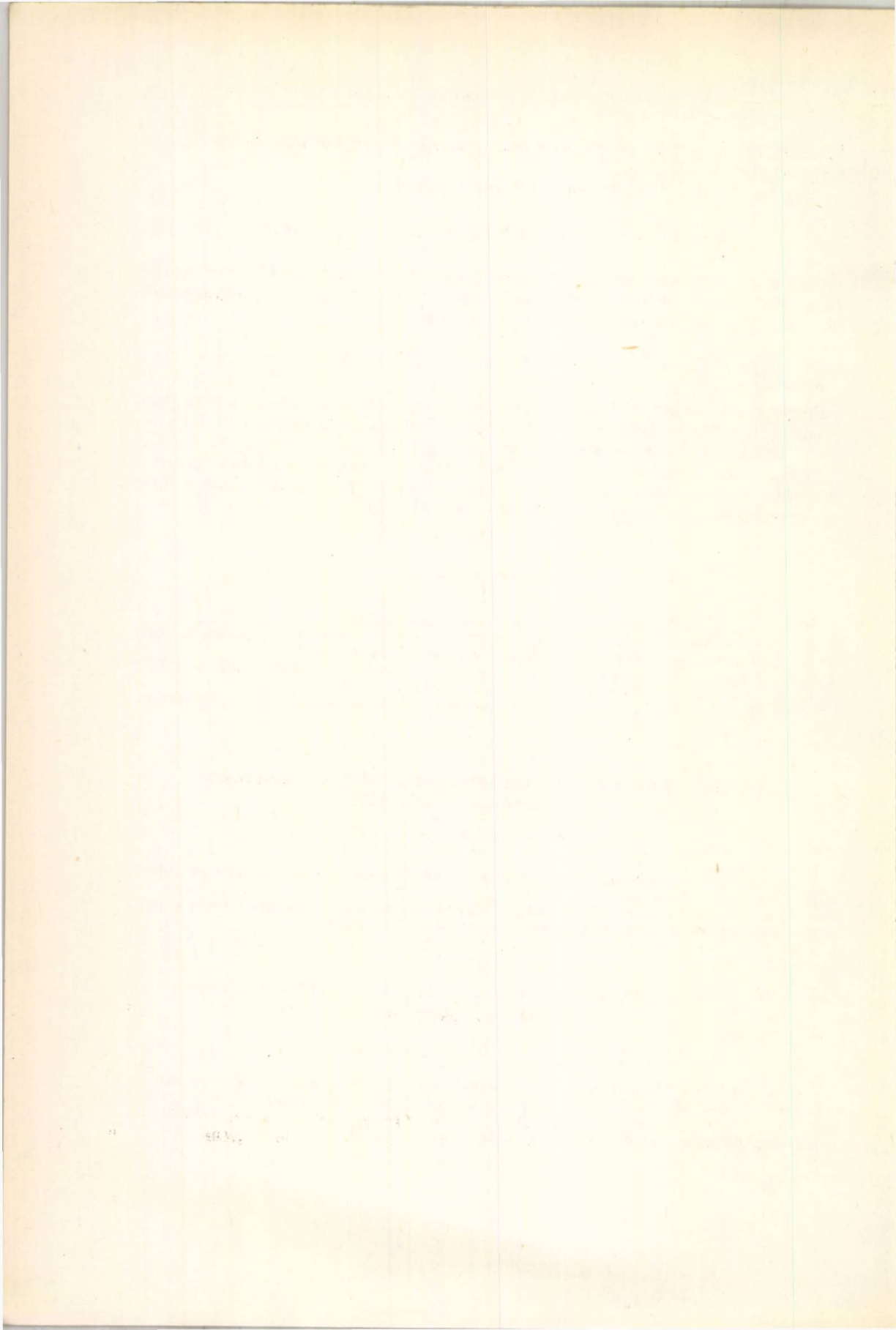
Показываются некоторые его свойства. Затем указываются применения этого метода в приближённом расчёте определённого интеграла путём графика.

APPLICATIONS DE LA MÉTHODE DU POLYGONE FUNICULAIRE DANS LE CALCUL GRAPHIQUE

RÉSUMÉ

On donne une interprétation de la méthode du polygone funiculaire de la mécanique classique, comme une fonctionnelle linéaire continue, démontrant certaines de ses propriétés.

En suite, on montre des applications de cette méthode au calcul approximatif des intégrales définies, par la méthode graphique.



MIȘCAREA PLANĂ CU VÎRTEJ CONSTANT A UNUI FLUID PERFECT IMCOMPRESIBIL ÎN JURUL UNUI PROFIL DE TIP JUCOVSKHI

ION I. CRISTEA

1. Punerea problemei

Vom considera cazul unei mișcări permanente cu vîrtej constant a unui fluid perfect incompresibil. În acest sens vom avea la bază considerațiile și notațiile făcute în [6].

Ne propunem să studiem mișcarea cu vîrtej constant în jurul unui aripi cilindrice de anvergură infinită cu generatoarele paralele la axa Oz și a cărei urmă în planul xOy este un profil de frontieră (C).

Vom admite că aripa este plasată într-un fluid perfect incompresibil care la mari distanțe este antrenat într-o mișcare paralelă cu axa Ox , viteza particolelor de la mari distanțe variind linear cu ordonata y și fiind constantă în lungul paralelelor la Oz .

Conform celor studiate în [6] pag. 283—285 și 290—295, dacă n-ar exista aripa în calea curentului, mișcarea fluidului ar fi o mișcare cu vîrtej constant, caracterizată de potențialul complex

$$F_0(z) = i \frac{a}{2} z^2 + V_0 z, \quad z = x + iy$$

unde a este o constantă desemnînd mărimea vîrtejului ($\text{rot } \vec{v} = a\vec{k}$), iar V_0 mărimea la mari distanțe a vitezei particolelor situate pe Ox . Distribuția de viteze a fluidului neperturbat ar fi dată de

$$w_0 = u_0 - iv_0 = \frac{\partial F_0}{\partial z} - iax = V_0 - ay$$

adică

$$u_0 = V_0 - ay, \quad v_0 = 0,$$

* Această lucrare este o parte a comunicării „Mișcări plane cu vîrtej constant în prezența unui profil” prezentată de autor la cel de „Al doilea colocviu de mecanica fluidelor” de la București din 19—23 octombrie 1963.

Dat fiind că, cu toată prezența aripei, la mari distanțe mișcarea fluidului rămâne neperturbată, înseamnă că viteza complexă $w = u - iv$ a fluidului în prezența aripei va satisface la infinit condiția

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} w = V_0 - ay \quad (1)$$

Vom căuta atunci potențialul complex $F(z)$ al mișcării fluidului în prezența aripei sub forma

$$F(z) = F_0(z) + F^*(z)$$

adică

$$F(z) = i \frac{a}{2} z^2 + V_0 z + F^*(z) \quad (2)$$

unde $F^*(z)$ apare ca un termen de corecție, ca un potențial perturbator.

Pentru viteza complexă a fluidului perturbat vom avea expresia

$$w = u - iv = \frac{dF}{dz} - iax = V_0 - ay + \frac{dF^*}{dz}$$

încît la mari distanțe

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{dF^*}{dz} = 0. \quad (1')$$

Pe suprafața aripei punînd condiția ca fluidul să alunece, avem condiția la limită

$$\left(\operatorname{Im} \{F(z)\} - \frac{1}{2} ax^2 \right) \Big|_{(C)} = k \quad (3)$$

unde k este o constantă. Dacă

$$F(z) = \varphi(x, y) + i \psi(x, y)$$

condiția la limită (3) se poate scrie sub forma

$$\psi(x, y) - \frac{1}{2} ax^2 = k \quad \text{pe } (C) \quad (3')$$

De asemenea dacă

$$F^*(z) = \varphi^*(x, y) + i \psi^*(x, y)$$

conform cu (2) avem

$$\varphi(x, y) = -axy + V_0 x + \varphi^*(x, y)$$

$$\psi(x, y) = \frac{a}{2} (x^2 - y^2) + V_0 y + \psi^*(x, y)$$

iar condiția la limită (3') devine

$$\psi^*(x, y) = \frac{a}{2} \left(y - \frac{V_0}{a} \right)^2 + k - \frac{V_0^2}{a} \quad \text{pe } (C) \quad (3'')$$

Problema constă deci în a determina funcția $F^*(z)$ olomoră în exteriorul conturului (C) astfel ca la mari distanțe să fie îndeplinită condiția (1') iar pe conturul (C) condiția (3'').

În cazul cînd conturul (C) este cercul $x^2 + y^2 = r^2$, această problemă a fost considerată și rezolvată de H. V. Sanden [1] în 1912. S. A. Ciaplighin [2] în 1921, V. N. Vălcovici [4] în 1952 și reluată de noi cu ocazia exemplurilor date în [6]. În 1943, H. S. Tsien [3] studiază cazul cînd conturul (C) este un profil Jucovski simetric.

Vom aborda în cele ce urmează cazul cînd conturul (C) este un profil Jucovski oarecare.

2. Determinarea potențialului complex

Conturul (C) fiind un profil Jucovski, fie $B'A'$ coarda profilului iar B_0A' coarda scheletului profilului. Vom alege originea 0 a axelor în mijlocul segmentului B_0A' , axa Ox pe direcția $B'A'$ iar Oy perpendiculară pe aceasta.

Fie A și M_0 punctele unde axa de portanță nulă a profilului (prima axă a profilului) taie axele Ox , respectiv Oy . Se știe că $OA = AA'$.

Să notăm cu M centrul cercului generator al profilului considerat și fie $OM = m$, iar $\angle BOM = \delta$. De asemenea să mai punem $OA = c$ și $\angle OAM = \tau$.

În baza reprezentării conforme a lui Jucovski

$$z = Z + \frac{c^2}{Z}$$

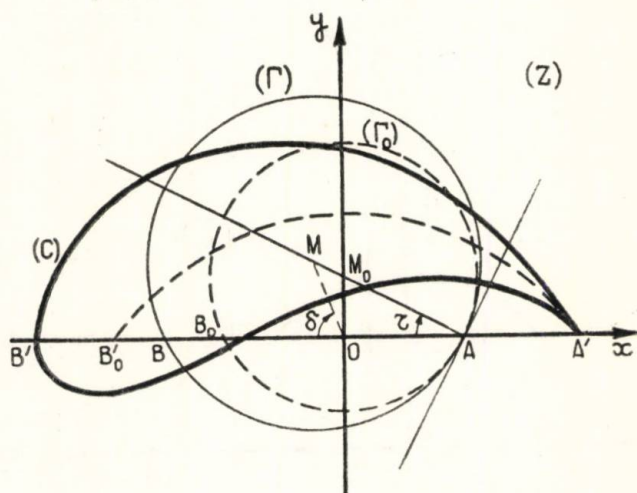


Fig. 1

unde $z = x + iy$ este afixa punctelor din planul fizic complex, conturul (C) al profilului considerat este imaginea cercului de ecuație $|Z - \mu| = R$ din planul complex (Z) unde $\mu = m e^{i(\pi-\delta)} = -m e^{-i\delta}$ este afixa punctului M , iar $R = \sqrt{c^2 + m^2 + 2cm \cos \delta}$ raza cercului generator.

Punctele A și B unde cercul generator $|Z - \mu| = R$ taie axa OX au afixele

$$Z_A = c \text{ și } Z_B = -c - 2m \cos \delta.$$

Acestor puncte în planul fizic le corespund punctele A' și B' de afixe

$$z_{A'} = 2c, \quad z_{B'} = -2c - \frac{4m^2 \cos^2 \delta}{c + 2m \cos \delta}$$

Făcînd apoi reprezentarea conformă

$$\zeta = Z - \mu$$

cercul $|Z - \mu| = R$ din planul (Z) va trece în cercul $|\zeta| = R$ din planul complex (ζ) .

Transformarea directă dela planul fizic (z) la planul (ζ) este

$$z = \zeta + \mu + \frac{c^2}{\zeta + \mu} \quad (4)$$

iar transformarea inversă

$$\zeta = \frac{z - 2\mu + \sqrt{z^2 - 4c^2}}{2} \quad (4')$$

Avînd la bază metoda lui C. Iacob [5] de rezolvare a problemelor la limită de tip Dirichlet pentru domenii reprezentabile conform cu ajutorul unor funcții raționale pe un cerc și cu date raționale pe conturul acestor domenii, vom considera funcția ajutătoare

$$f(\zeta) = F^* \left(\zeta + \mu + \frac{c^2}{\zeta + \mu} \right) \quad (5)$$

care este olomorfa în exteriorul cercului $|\zeta| = R$.

Să notăm cu $P(y)$ expresia polinomului de gradul doi ce apare în membrul doi al condiției la limită (3')

$$P(y) = \frac{a}{2} \left(y - \frac{V_0}{a} \right)^2 + k',$$

$$k' = k - \frac{V_0^2}{2a}$$

Cum din (4) avem

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta) = (\xi - m \cos \delta) \left(1 + \frac{c^2}{(\xi - m \cos \delta)^2 + (\eta + m \sin \delta)^2} \right) \\ y &= y(\xi, \eta) = (\eta + m \sin \delta) \left(1 - \frac{c^2}{(\xi - m \cos \delta)^2 + (\eta + m \sin \delta)^2} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

funcțiunea $f(\zeta)$ va satisface pe cercul $|\zeta| = R$ condiția la limită

$$\operatorname{Re} \{-if(\zeta)\} |_{|\zeta|=R} = P[y(\xi, \eta) |_{|\zeta|=R}] \quad (7)$$

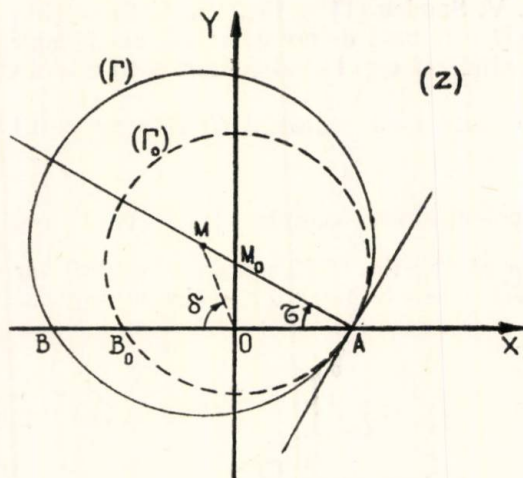


Fig. 2

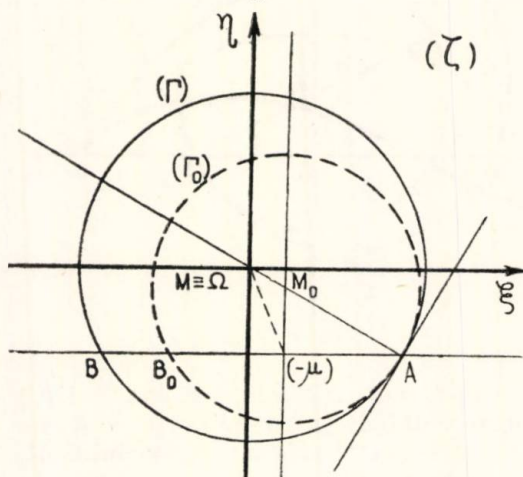


Fig. 3

Notînd

$$G(\xi, \eta) = P[y(\xi, \eta)] \quad (8)$$

funcția $G(\xi, \eta)$ este vizibil rațională.

Pe cercul $|\zeta| = R$ avem

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{R^2}{\zeta} \right), \quad \eta = \frac{1}{2i} \left(\zeta - \frac{R^2}{\zeta} \right) \quad (9)$$

astfel că considerînd funcția

$$H(\zeta) = G \left[\frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{R^2}{\zeta} \right), \frac{1}{2i} \left(\zeta - \frac{R^2}{\zeta} \right) \right] \quad (10)$$

această funcție este evident reală și egală pe $|\zeta| = R$ cu $G(\xi, \eta)$. Conform cu (8) deci

$$H(\zeta) = P \left\{ y \left[\frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{R^2}{\zeta} \right), \frac{1}{2i} \left(\zeta - \frac{R^2}{\zeta} \right) \right] \right\} \quad (10')$$

astfel că pentru aflarea lui $H(\zeta)$ este suficient să calculăm funcția

$$M(\zeta) = y \left[\frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{R^2}{\zeta} \right), \frac{1}{2i} \left(\zeta - \frac{R^2}{\zeta} \right) \right]$$

Conform cu (6) avem

$$M(\zeta) = \left[\frac{1}{2i} \left(\zeta - \frac{R^2}{\zeta} \right) + m \sin \delta \right] \cdot$$

$$\cdot \left\{ 1 - \frac{c^2}{\left[\frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{R^2}{\zeta} \right) - m \cos \delta \right]^2 + \left[\frac{1}{2i} \left(\zeta - \frac{R^2}{\zeta} \right) + m \sin \delta \right]^2} \right\}$$

adică

$$M(\zeta) = \frac{1}{2i} \left(\zeta - \frac{R^2}{\zeta} + 2i m \sin \delta \right) \cdot$$

$$\cdot \left[1 - \frac{c^2}{R^2 + m^2 - m \cos \delta \left(\zeta + \frac{R^2}{\zeta} \right) + m \sin \delta \frac{1}{i} \left(\zeta - \frac{R^2}{\zeta} \right)} \right]$$

sau încă

$$M(\zeta) = \frac{1}{2i} \left(\zeta + 2i m \sin \delta - \frac{R^2}{\zeta} \right) \cdot$$

$$\cdot \left[1 + \frac{c^2}{m e^{i\delta} \zeta^2 - (R^2 + m^2) \zeta + m R^2 e^{-i\delta}} \right]$$

Ori

$$m e^{i\delta} \zeta^2 - (R^2 + m^2) \zeta + m R^2 e^{-i\delta} = (\zeta - m e^{-i\delta}) (m e^{i\delta} \zeta - R^2)$$

iar

$$\frac{c^2}{(\zeta - me^{-i\delta})(me^{i\delta}\zeta - R^2)} = -\frac{c^2 e^{-i\delta}}{m(R^2 - m^2)} \left(\frac{m^2}{\zeta - me^{-i\delta}} - \frac{R^2}{\zeta - \frac{R^2}{m} e^{-i\delta}} \right)$$

încît notînd

$$\mu = -me^{-i\delta} = \alpha + i\beta, \quad \nu = -\frac{R^2}{m} e^{-i\delta}$$

$$\lambda = \frac{c^2 e^{-i\delta}}{m(R^2 - m^2)}$$

avem $\beta = m \sin \delta$ şi deci

$$M(\zeta) = -\frac{i}{2} \left(\zeta + 2i\beta - \frac{R^2}{\zeta} \right) \left(1 - \frac{\lambda m^2}{\zeta + \mu} + \frac{\lambda R^2}{\zeta + \nu} \right)$$

sau desfăcînd parantezele

$$M(\zeta) = -\frac{i}{2} \left(\zeta + 2i\beta - \frac{R^2}{\zeta} - \lambda m^2 \frac{\zeta + 2i\beta}{\zeta + \mu} + \lambda m^2 R^2 \frac{1}{\zeta(\zeta + \mu)} + \right. \\ \left. + \lambda R^2 \frac{\zeta + 2i\beta}{\zeta + \nu} - \lambda R^4 \frac{1}{\zeta(\zeta + \nu)} \right).$$

Însă

$$\frac{\zeta + 2i\beta}{\zeta + \mu} = 1 + \frac{2i\beta - \mu}{\zeta + \mu}, \quad \frac{\zeta + 2i\beta}{\zeta + \nu} = 1 + \frac{2i\beta - \nu}{\zeta + \nu} \\ \frac{1}{\zeta(\zeta + \mu)} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta + \mu} \right), \quad \frac{1}{\zeta(\zeta + \nu)} = \frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta + \nu} \right) \quad (11)$$

astfel că

$$M(\zeta) = -\frac{i}{2} \left[\zeta + \left(me^{i\delta} + \frac{c^2 - m^2}{m} e^{-i\delta} \right) - \frac{R^2}{\zeta} + \frac{c^2}{\zeta + \mu} + \frac{c^2 \frac{R^2}{m^2} e^{-2i\delta}}{\zeta + \nu} \right] \quad (12)$$

Prin urmare, expresia (10') a lui $H(\zeta)$ va fi dată de

$$H(\zeta) = \frac{a}{2} \left[M(\zeta) - \frac{V_0}{a} \right]^2 + k'$$

şi deci în baza lui (12) ea va fi

$$H(\zeta) = -\frac{a}{8} \left[\zeta + \left(me^{i\delta} + \frac{c^2 - m^2}{m} e^{-i\delta} - \frac{R^2}{\zeta} + \frac{c^2}{\zeta + \mu} + \frac{c^2 \frac{R^2}{m^2} e^{-2i\delta}}{\zeta + \nu} - \frac{2V_0}{a} i \right)^2 + k' \right]$$

Notînd

$$\gamma = me^{i\delta} + \frac{c^2 - m^2}{m} e^{-i\delta} - \frac{2V_0}{a} i = 2i\left(\beta - \frac{V_0}{a}\right) + \frac{c^2}{m} e^{-i\delta} \quad d = \frac{cR}{m} e^{-i\delta}$$

om, avea

$$H(\zeta) = -\frac{a}{8} \left(\zeta + \gamma - \frac{R^2}{\zeta} + \frac{c^2}{\zeta + \mu} + \frac{d^2}{\zeta + \nu} \right)^2 + k'$$

au dezvoltînd patratul din dreapta

$$\begin{aligned} H(\zeta) = & -\frac{a}{8} \left[\zeta^2 + \gamma^2 + \frac{R^4}{\zeta^2} + \frac{c^4}{(\zeta + \mu)^2} + \frac{d^4}{(\zeta + \nu)^2} + 2\gamma\zeta - \right. \\ & - 2R^2 + 2c^2 \frac{\zeta}{\zeta + \mu} + 2d^2 \frac{\zeta}{\zeta + \nu} - 2\gamma \frac{R^2}{\zeta} + 2\gamma \frac{c^2}{\zeta + \mu} + 2\gamma \frac{d^2}{\zeta + \nu} - \\ & \left. - 2 \frac{R^2 c^2}{\zeta(\zeta + \mu)} - 2 \frac{R^2 d^2}{\zeta(\zeta + \nu)} + 2 \frac{c^2 d^2}{(\zeta + \mu)(\zeta + \nu)} \right] + k' \end{aligned}$$

Ori cum

$$\begin{aligned} \frac{\zeta}{\zeta + \mu} &= 1 - \frac{\mu}{\zeta + \mu}, & \frac{\zeta}{\zeta + \nu} &= 1 - \frac{\nu}{\zeta + \nu} \\ \frac{1}{(\zeta + \mu)(\zeta + \nu)} &= \frac{1}{\nu - \mu} \left(\frac{1}{\zeta + \mu} - \frac{1}{\zeta + \nu} \right) \end{aligned}$$

și conform cu (11) rezultă

$$\begin{aligned} H(\zeta) = & -\frac{a}{8} [\zeta^2 + 2\gamma\zeta + (\gamma^2 - 2R^2 + 2c^2 + 2d^2) + \\ & + 2\left(\frac{2c^2}{m} \cos \delta - \gamma\right) \frac{R^2}{\zeta} + \frac{R^4}{\zeta^2} + 2\left(\gamma - \mu + \frac{R^2}{\mu} + \frac{d^2}{\nu - \mu}\right) \frac{c^2}{\zeta + \mu} + \\ & + \frac{c^4}{(\zeta + \mu)^2} + 2\left(\gamma - \nu + \frac{R^2}{\nu} - \frac{c^2}{\nu - \mu}\right) \frac{d^2}{\zeta + \nu} + \frac{d^4}{(\zeta + \nu)^2}] + k' \end{aligned} \quad (13)$$

Ori

$$\frac{2c^2}{m} \cos \delta - \gamma = -2i\left(\beta - \frac{V_0}{a}\right) + \frac{c^2}{m} e^{i\delta} = \bar{\gamma}$$

și notînd

$$\begin{aligned} A &= \gamma - \mu + \frac{R^2}{\mu} + \frac{d^2}{\nu - \mu} \quad \text{și} \quad B = \gamma - \nu + \frac{R^2}{\nu} - \frac{c^2}{\nu - \mu} \\ C &= \gamma^2 - 2R^2 + 2c^2 + 2d^2 \end{aligned}$$

se observă că

$$\begin{aligned} \overline{H\left(\frac{R^2}{\zeta}\right)} = & -\frac{a}{8}\left[\frac{R^4}{\zeta^2} + 2\overline{\gamma} \frac{R^2}{\zeta} + \left(\overline{C} + 2\overline{A} \frac{c^2}{\mu} + \frac{c^4}{\mu^2} + 2\overline{B} \frac{d^2}{v} + \frac{d^4}{v^2}\right) + \right. \\ & \left. + 2\overline{\gamma}\zeta + \zeta^2 - 2\left(\overline{A} + \frac{c^2}{\mu}\right) \frac{d^2}{\zeta + v} + \right. \\ & \left. + \frac{d^4}{(\zeta + v)^2} - 2\left(\overline{B} + \frac{d^2}{v}\right) \frac{c^2}{\zeta + \mu} + \frac{c^4}{(\zeta + \mu)^2}\right] + k' \end{aligned} \quad (13)$$

și cum

$$\begin{aligned} A &= -\left(\overline{B} + \frac{d^2}{v}\right), & B &= -\left(\overline{A} + \frac{c^2}{\mu}\right) \\ \overline{C} + 2\overline{A} \frac{c^2}{\mu} + \frac{c^4}{\mu^2} + 2\overline{B} \frac{d^2}{v} + \frac{d^4}{v^2} &= C \end{aligned}$$

se verifică faptul că

$$\overline{H\left(\frac{R^2}{\zeta}\right)} = H(\zeta)$$

ceea ce constituie un indiciu că expresia (13) a lui $H(\zeta)$ este calculată corect. Vizibil, singularitățile lui $H(\zeta)$ sînt

$$\begin{aligned} \zeta &= 0, \quad \zeta = -\mu = m e^{-i\delta}, \\ \zeta &= -v = \frac{R^2}{m} e^{-i\delta} = -\frac{R^2}{\mu} \quad \text{și} \quad \zeta = \infty \end{aligned}$$

dintre care cum $|\mu| = m < R$ și $|v| = \frac{R^2}{m} > R$, doar $\zeta = 0$ și $\zeta = -\mu$

sînt situate în interiorul cercului $|\zeta| = R$, celelalte singularități $\zeta = -v$ și $\zeta = \infty$ fiind situate în afara acestui cerc (în punctele simetrice față de cerc).

Fie $K_0(\zeta)$ partea principală a lui $H(\zeta)$ relativ la singularitățile din exteriorul cercului $|\zeta| = R$, iar $L_0(\zeta)$ partea principală a lui $H(\zeta)$ relativ la singularitățile sale din interiorul lui $|\zeta| = R$.

Avem

$$K_0(\zeta) = \overline{L_0\left(\frac{R^2}{\zeta}\right)} + k_1,$$

$$L_0(\zeta) = \overline{K_0\left(\frac{R^2}{\zeta}\right)} + k_2$$

iar în baza teoremei cercului a lui L. M. Milne-Thomson, avem

$$H(\zeta) = K_0(\zeta) + \overline{K_0\left(\frac{R^2}{\zeta}\right)} + l,$$

u

$$H(\zeta) = L_0(\zeta) + \overline{L_0\left(\frac{R^2}{\bar{\zeta}}\right)} + l_2$$

nde l_1 și l_2 (ca și k_1 și k_2) sînt constante reale ce se determină imediat
Avînd în plus

$$\left\{ K_0(\zeta) - \overline{K_0\left(\frac{R^2}{\bar{\zeta}}\right)} \right\} \Big|_{|\zeta|=R} = 0$$

$$\left\{ L_0(\zeta) - \overline{L_0\left(\frac{R^2}{\bar{\zeta}}\right)} \right\} \Big|_{|\zeta|=R} = 0$$

um avem în vedere că funcția $-if(\zeta)$ trebuie să fie olomorfă în exteriorul acestui
erc, condiția la limită (7) pe cerul $|\zeta| = R$ se va mai scrie

$$Re \{ -if(\zeta) \} \Big|_{|\zeta|=R} = Re \left\{ 2 \overline{K_0\left(\frac{R^2}{\bar{\zeta}}\right)} \right\} \Big|_{|\zeta|=R} + e_1 \quad (14)$$

$$Re \{ -if(\zeta) \} \Big|_{|\zeta|=R} = Re \{ 2 L_0(\zeta) \} \Big|_{|\zeta|=R} + e_2 \quad (14')$$

Cum funcțiile $\overline{K_0\left(\frac{R^2}{\bar{\zeta}}\right)}$ și $L_0(\zeta)$ sînt olomorfe în exteriorul cercului $|\zeta|=R$
ondițiile la limită (14) și (14') conduc la

$$-if(\zeta) = 2 \overline{K_0\left(\frac{R^2}{\bar{\zeta}}\right)} + \gamma_1 \quad (15)$$

espectiv

$$-if(\zeta) = 2 L_0(\zeta) + \gamma_2 \quad (15')$$

nde γ_1 și γ_2 sînt constante complexe arbitrare care se pot determina cu
șurință.

Deoarece expresia lui $H(\zeta)$ s-a scris sub forma (13) este evident că avem

$$K_0(\zeta) = -\frac{a}{8} \left[\zeta^2 + 2\gamma\zeta + 2B \frac{d^2}{\zeta + \nu} + \frac{d^4}{(\zeta + \nu)^2} \right]$$

$$L_0(\zeta) = -\frac{a}{8} \left[\frac{R^4}{\zeta^2} + 2\bar{\gamma} \frac{R^2}{\zeta} + 2A \frac{c^2}{\zeta + \mu} + \frac{c^4}{(\zeta + \mu)^2} \right]$$

Prin urmare conform cu (15) sau (15') rezultă

$$-if(\zeta) = -\frac{a}{4} \left[\frac{R^4}{\zeta^2} + 2\bar{\gamma} \frac{R^2}{\zeta} + 2A \frac{c^2}{\zeta + \mu} + \frac{c^4}{(\zeta + \mu)^2} \right] + \gamma_2$$

de unde

$$f(\zeta) = -i \frac{a}{4} \left[\frac{R^4}{\zeta^2} + 2\bar{\gamma} \frac{R^2}{\zeta} + 2A \frac{c^2}{\zeta + \mu} + \frac{c^4}{(\zeta + \mu)^2} \right] + i\gamma_2 \quad (16)$$

sau

$$f(\zeta) = -i \frac{a}{4} \left[\left(\frac{R^2}{\zeta} + \bar{\gamma} \right)^2 + \left(\frac{c^2}{\zeta + \mu} + A \right)^2 \right] + \kappa \quad (1)$$

unde am notat $\kappa = i \frac{a}{4} (\bar{\gamma}^2 + A^2) + i \gamma_2$.

Pentru aflarea potențialului complex $F^*(z)$ vom ține cont că în notațiile (5) avem

$$F^*(z) = f \left(\frac{z - 2\mu + \sqrt{z^2 - 4c^2}}{2} \right)$$

Așa dar

$$F^*(z) = -i \frac{a}{4} \left[\left(\frac{2R^2}{z - 2\mu + \sqrt{z^2 - 4c^2}} + \bar{\gamma} \right)^2 + \left(\frac{2c^2}{z + \sqrt{z^2 - 4c^2}} + A \right)^2 \right] + \kappa \quad (1)$$

sau încă

$$F^*(z) = -i \frac{a}{4} \left[\left(\frac{R^2}{2} \frac{z - 2\mu - \sqrt{z^2 - 4c^2}}{c^2 + \mu^2 - \mu z} + \bar{\gamma} \right)^2 + \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - 4c^2}}{2} + A \right)^2 \right] + \kappa \quad (17)$$

Prin derivare din (17) avem apoi

$$\frac{dF^*(z)}{dz} = ia \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - 4c^2}} \right) \left[\frac{R^2}{(z - 2\mu + \sqrt{z^2 - 4c^2})^2} \left(\frac{2R^2}{z - 2\mu + \sqrt{z^2 - 4c^2}} + \bar{\gamma} \right) + \frac{c^2}{(z + \sqrt{z^2 - 4c^2})^2} \left(\frac{2c^2}{z + \sqrt{z^2 - 4c^2}} + A \right) \right] \quad (18)$$

sau ceea ce este același lucru

$$\frac{dF^*(z)}{dz} = i \frac{a}{16} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - 4c^2}} \right) \left[R^2 \left(\frac{z - 2\mu - \sqrt{z^2 - 4c^2}}{c^2 + \mu^2 - \mu z} \right)^2 \left(\frac{R^2}{2} \frac{z - 2\mu - \sqrt{z^2 - 4c^2}}{c^2 + \mu^2 - \mu z} + \bar{\gamma} \right) + \frac{(z - \sqrt{z^2 - 4c^2})^2}{c^2} \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - 4c^2}}{2} + A \right) \right] \quad (18')$$

Alegînd pentru $\sqrt{z^2 - 4c^2}$ determinarea care face acest radical pozitiv pentru $z = x$ și $x > 2c$, avem evident

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{dF^*(z)}{dz} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{dF^*(z)}{dz} = 0$$

astfel că este îndeplinită și condiția la mari distanțe (1')

În concluzie pentru potențialul complex $F(z)$ al mișcării plane permanente cu vîrtej constant în jurul unui profil Jucovski, la mari distanțe avînd distribuția de viteze (1) vom avea expresia

$$F(z) = i \frac{a}{2} z^2 + V_0 z - i \frac{a}{16} \left[\left(R^2 \frac{z - 2\mu - \sqrt{z^2 - 4c^2}}{c^2 + \mu^2 - \mu z} + 2\bar{\gamma} \right)^2 + (z + 2A - \sqrt{z^2 - 4c^2})^2 \right] + \kappa \quad (19)$$

Viteza complexă va avea apoi expresia

$$w = V_0 - ay + i \frac{a}{32} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - 4c^2}} \right) \left[R^2 \left(\frac{z - 2\mu - \sqrt{z^2 - 4c^2}}{c^2 + \mu^2 - \mu z} \right)^2 \left(R^2 \frac{z - 2\mu - \sqrt{z^2 - 4c^2}}{c^2 + \mu^2 - \mu z} + 2\bar{\gamma} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{c^2} (z - \sqrt{z^2 - 4c^2})^2 (z + 2A - \sqrt{z^2 - 4c^2}) \right] \quad (20)$$

3. Corectarea soluției

Dat fiind că din (20) că viteza fluidului în punctul $z = 2c$ devine infinită, pentru a înlătura această incompatibilitate fizică, analog ca în cazul mișcării irotaționale plane în jurul unui profil Jucovski, vom adăuga la expresia (16') a funcției $f(\zeta)$ termenul

$$\frac{k}{2\pi i} \log \zeta \quad (21)$$

unde k trebuie să fie o constantă reală. În acest fel, pentru $|\zeta| = R$ acest termen avînd partea imaginară constantă, condiția la limită (7) este în continuare verificată. În plus, cum derivata acestui termen este

$$\frac{k}{2\pi i} \frac{1}{\zeta}$$

pentru $\zeta \rightarrow \infty$ acest termen tinde la zero și deci și condiția la mari distanțe (1') va fi de asemenea verificată.

Așadar, în locul expresiei (16') a funcției $f(\zeta)$ se poate lua

$$f(\zeta) = -i \frac{a}{4} \left[\left(\frac{R^2}{\zeta} + \bar{\gamma} \right)^2 + \left(\frac{c^2}{\zeta + \mu} + A \right)^2 \right] + \frac{k}{2\pi i} \log \zeta + \kappa \quad (22)$$

Să punem

$$A^* = A - \gamma + \mu$$

Ținând cont că

$$R^2 = c^2 + m^2 + 2 cm \cos \delta, \quad m^2 = c^2 + R^2 - 2 cR \cos \tau$$

$$m \sin \delta = R \sin \tau$$

pentru A^* avem expresiile succesive

$$A^* = \frac{R^2}{\mu} + \frac{d^2}{\nu - \mu} = -\frac{R^2}{m} e^{i\delta} + \frac{R^2 c^2}{m(m^2 - R^2)} e^{-i\delta} = \frac{2R^2 c}{m(m^2 - R^2)} \cos \delta e^{i\tau}$$

Expresia lui $f(\zeta)$ se mai scrie atunci

$$f(\zeta) = -i \frac{a}{4} \left[\left(\frac{R^2}{\zeta} + \bar{\gamma} \right)^2 + \left(\frac{c^2}{\zeta + \mu} + \gamma - \mu \right)^2 + 2A^* \frac{c^2}{\zeta + \mu} \right] + \frac{k}{2\pi i} \log \zeta + \kappa' \quad (22')$$

unde $\kappa' = \kappa - i \frac{a}{4} [2A^*(\gamma - \mu) + A^{*2}]$ este o altă constantă.

Potențialul complex $F(z)$ va fi atunci de forma

$$F(z) = i \frac{a}{2} z^2 + V_0 z + f \left(\frac{z - 2\mu + \sqrt{z^2 - 4c^2}}{2} \right)$$

iar viteza complexă

$$w = V_0 - ay + \left(\frac{df}{d\zeta} \right) \Big|_{\zeta = \zeta(z)} \cdot \frac{d\zeta}{dz}$$

Ca și în cazul formulei (20) avînd

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - 4c^2}} \right)$$

urmează că pentru ca viteza complexă w să fie finită în punctul $z = 2c$ trebuie ca

$$\left(\frac{df}{d\zeta} \right) \Big|_{\zeta=c-\eta} = 0 \quad (23)$$

întrucît punctul $\zeta = c - \mu$ este imaginea în planul (ζ) a punctului $z = 2c$ din planul (z).

Cum din (22) avem

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\zeta} = i \frac{a}{2} \left[\frac{R^2}{\zeta^2} \left(\frac{R^2}{\zeta} + \bar{\gamma} \right) + \frac{c^2}{(\zeta + \mu)^2} \left(\frac{c^2}{\zeta + \mu} + \gamma - \mu \right) + \right. \\ \left. + A^* \frac{c^2}{(\zeta + \mu)^2} \right] + \frac{k}{2\pi i} \frac{1}{\zeta} \end{aligned} \quad (24)$$

condiția (23) va da

$$i \frac{a}{2} \left[\frac{R^2}{(c - \mu)^2} \left(\frac{R^2}{c - \mu} + \bar{\gamma} \right) + (c + \gamma - \mu) + A^* \right] + \frac{k}{2\pi i} \frac{1}{c - \mu} = 0$$

de unde

$$k = \pi a \left[\frac{R^2}{c - \mu} \left(\frac{R^2}{c - \mu} + \bar{\gamma} \right) + (c + \gamma - \mu)(c - \mu) + A^*(c - \mu) \right]$$

Cum apoi

$$|c - \mu| = \sqrt{c^2 + 2cm \cos \delta + m^2} = R$$

expresia lui k se mai scrie

$$k = \pi a [(c - \bar{\mu})(c - \bar{\mu} + \bar{\gamma}) + (c - \mu)(c - \mu + \gamma)] + \pi a A^*(c - \mu) \quad (25)$$

Paranteza mare a acestei formule (25) fiind suma a două numere imaginare conjugate este un număr real. De asemenea cum

$$c \cos \tau + m \cos (\delta - \tau) = R, \quad c \sin \tau - m \sin (\delta - \tau) = 0$$

avem

$$A^*(c - \mu) = \frac{2R^4c}{m(m^2 - R^2)} \cos \delta (c e^{i\tau} + m e^{-i(\delta - \tau)}) = \frac{2R^4c}{m(m^2 - R^2)} \cos \delta$$

încît condiția ca constanta k să fie reală este îndeplinită.

Coeficientul k se interpretează analog ca în cazul mișcării irotaționale ca o circulație, dar ca o circulație suplimentară întrucît viteza fluidului la ocolirea completă a profilului (C) prezenta o circulație chiar în cazul potențialului (19). Valoarea acestei circulații corespunzătoare potențialului (19) în baza celor tratate în [6] ar fi fost

$$K_0 = (Re\{F(z)\})|_{(C)} + a\mathcal{A} = a\mathcal{A}$$

unde $\mathcal{A}$ este aria domeniului D mărginit de curba (C) în planul (ζ). Existența acestei circulații K_0 se datorește doar faptului că mișcarea fluidă pe care o studiem este cu vîrtej constant. Adăugarea termenului (21) la expresia (16') a lui $f(\zeta)$ nu face decît ca în cazul mișcării fluide cu vîrtej constant caracterizate de potențialul

$$F(z) = i \frac{a}{2} z^2 + V_0 z - i \frac{a}{16} \left[\left(R^2 \frac{z - 2\mu - \sqrt{z^2 - 4c^2}}{c^2 + \mu^2 - \mu\zeta} + 2\bar{\gamma} \right)^2 + (z + 2A - \sqrt{z^2 - 4c^2})^2 \right] + \frac{k}{2\pi i} \log \left(\frac{z - 2\mu + \sqrt{z^2 - 4c^2}}{2} \right) + \kappa \quad (26)$$

circulația vitezei $\vec{v}$ a fluidului de-a lungul conturului (C) să fie

$$K = (Re\{F(z)\})|_{(C)} + a\mathcal{A} = k + a\mathcal{A}$$

adică să se mărească cu k .

Viteza complexă va avea astfel expresia

$$\begin{aligned}
 w = V_0 - ay + \\
 + i \frac{a}{32} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - 4c^2}} \right) \left[R^2 \left(\frac{z - 2\mu - \sqrt{z^2 - 4c^2}}{c^2 + \mu^2 - \mu z} \right)^2 \left(R^2 \frac{z - 2\mu - \sqrt{z^2 - 4c^2}}{c^2 + \mu^2 - \mu z} + 2\bar{\gamma} \right) + \right. \\
 \left. + \frac{1}{c^2} (z - \sqrt{z^2 - 4c^2})^2 (z + 2A - \sqrt{z^2 - 4c^2}) + \right. \\
 \left. - \frac{4k}{\pi a} \frac{z - 2\mu - \sqrt{z^2 - 4c^2}}{c^2 + \mu^2 - \mu z} \right] \quad (27)
 \end{aligned}$$

4. Acțiunea fluidului asupra aripei

În [6] am obținut pentru cazul mișcării permanente cu vîrtej constant următoarele formule ce caracterizează acțiunea fluidului asupra unui obstacol cilindric cu generatoarele paralele la axa Oz și a cărui urmă în planul xOy este un profil de contur (C) :

$$R_x - iR_y = i \frac{\rho}{2} \int_{(C)} \left(\frac{dF}{dz} \right)^2 dz + \rho a \operatorname{Re} \left\{ \int_{(C)} \frac{dF}{dz} dz \right\} \quad (28)$$

$$M_0 = - \frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_{(C)} z \left(\frac{dF}{dz} \right)^2 dz - ia \int_{(C)} z^2 \frac{dF}{dz} dz \right\} \quad (29)$$

În cazul nostru (C) este un profil Jucovski.
Avem

$$\frac{dF}{dz} = iaz + V_0 + \frac{dF^*}{dz}$$

încît

$$\begin{aligned}
 \int_{(C)} z \frac{dF}{dz} dz &= \int_{(C)} (iaz + V_0)z dz + \int_{(C)} z \frac{dF^*}{dz} dz \\
 \int_{(C)} z^2 \frac{dF}{dz} dz &= \int_{(C)} (iaz + V_0)z^2 dz + \int_{(C)} z^2 \frac{dF^*}{dz} dz \\
 \int_{(C)} \left(\frac{dF}{dz} \right)^2 dz &= \int_{(C)} (iaz + V_0)^2 dz + 2 \int_{(C)} (iaz + V_0) \frac{dF^*}{dz} dz + \int_{(C)} \left(\frac{dF^*}{dz} \right)^2 dz \\
 \int_{(C)} z \left(\frac{dF}{dz} \right)^2 dz &= \int_{(C)} (iaz + V_0)^2 z dz + 2 \int_{(C)} (iaz + V_0) z \frac{dF^*}{dz} dz + \\
 &\quad + \int_{(C)} z \left(\frac{dF^*}{dz} \right)^2 dz
 \end{aligned}$$

Ori este evident că

$$\begin{aligned}
 \int_{(C)} (iaz + V_0) dz &= 0, & \int_{(C)} (iaz + V_0)z^2 dz &= 0 \\
 \int_{(C)} (iaz + V_0)^2 dz &= 0, & \int_{(C)} (iaz + V_0)^2 z dz &= 0
 \end{aligned}$$

De asemenea cum prin transformarea (4) exteriorul profilului (C) se reprezintă conform pe exteriorul cercului (Γ): $|\zeta| = R$, avem

$$\begin{aligned}\int_{(C)} \frac{dF^*}{dz} dz &= \int_{(\Gamma)} \frac{df}{d\zeta} d\zeta, \\ \int_{(C)} z \frac{dF^*}{dz} dz &= \int_{(\Gamma)} z(\zeta) \frac{df}{d\zeta} d\zeta, \quad \int_{(C)} z^2 \frac{dF^*}{dz} dz = \int_{(\Gamma)} z(\zeta) \frac{df}{d\zeta} d\zeta, \\ \int_{(C)} \left(\frac{dF^*}{dz} \right)^2 dz &= \int_{(\Gamma)} \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^2 \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)^{-1} d\zeta, \\ \int_{(C)} z \left(\frac{dF^*}{dz} \right)^2 dz &= \int_{(\Gamma)} z(\zeta) \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^2 \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)^{-2} d\zeta.\end{aligned}$$

Însă conform cu (24)

$$\frac{df}{d\zeta} = i \frac{a}{2} \left[\frac{R^4}{\zeta^3} + \bar{\gamma} \frac{R^2}{\zeta^2} + \frac{c^4}{(\zeta + \mu)^3} + A \frac{c^2}{(\zeta + \mu)^2} - \frac{k}{\pi a} \frac{1}{\zeta} \right] \quad (24')$$

iar

$$\frac{dz}{d\zeta} = 1 - \frac{c^2}{(\zeta + \mu)^2} = \frac{(\zeta + \mu + c)(\zeta + \mu - c)}{(\zeta + \mu)^2}$$

Prin aplicarea teoremei reziduurilor, cum punctele singulare $\zeta = 0$ și $\zeta = -\mu$ sînt interioare cercului $|\zeta| = R$, avem

$$\begin{aligned}\int_{(\Gamma)} \frac{df}{d\zeta} d\zeta &= i \frac{a}{2} \int_{(\Gamma)} \left[\frac{R^4}{\zeta^3} + \bar{\gamma} \frac{R^2}{\zeta^2} + \frac{c^4}{(\zeta + \mu)^3} + A \frac{c^2}{(\zeta + \mu)^2} - \frac{k}{\pi a} \frac{1}{\zeta} \right] d\zeta = k \\ \int_{(\Gamma)} z(\zeta) \frac{df}{d\zeta} d\zeta &= i \frac{a}{2} \int_{(\Gamma)} \left(\zeta + \mu + \frac{c^2}{\zeta + \mu} \right) \left[\frac{R^4}{\zeta^3} + \bar{\gamma} \frac{R^2}{\zeta^2} + \frac{c^4}{(\zeta + \mu)^3} + \right. \\ &\quad \left. + A \frac{c^2}{(\zeta + \mu)^2} - \frac{k}{\pi a} \frac{1}{\zeta} \right] d\zeta = -\pi a (\bar{\gamma} R^2 + A c^2) + k \mu\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{(\Gamma)} z^2(\zeta) \frac{df}{d\zeta} d\zeta &= i \frac{a}{2} \int_{(\Gamma)} \left(\zeta + \mu + \frac{c^2}{\zeta + \mu} \right)^2 \left[\frac{R^4}{\zeta^3} + \bar{\gamma} \frac{R^2}{\zeta^2} + \frac{c^4}{(\zeta + \mu)^3} + \right. \\ &\quad \left. + A \frac{c^2}{(\zeta + \mu)^2} - \frac{k}{\pi a} \frac{1}{\zeta} \right] d\zeta = -\pi a (R^4 + 2\bar{\gamma} \mu R^2 + c^4) + k(2c^2 + \mu^2)\end{aligned}$$

De asemenea tot în baza teoremei reziduurilor (și semireziduurilor) cum suma tuturor reziduurilor unei funcțiuni corespunzătoare tuturor punctelor sale singulare este nulă, avem

$$\begin{aligned}\int_{(\Gamma)} \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^2 \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)^{-2} d\zeta &= -\frac{a^2}{4} \int_{(\Gamma)} \left[\frac{R^4}{\zeta^3} + \bar{\gamma} \frac{R^2}{\zeta^2} + \frac{c^4}{(\zeta + \mu)^3} + \right. \\ &\quad \left. + A \frac{c^2}{(\zeta + \mu)^2} - \frac{k}{\pi a} \frac{1}{\zeta} \right]^2 \frac{(\zeta + \mu)^2}{(\zeta + \mu + c)(\zeta + \mu - c)} d\zeta = \\ &= -\frac{a^2}{4} (-\pi i) \frac{c}{2} \left[\frac{R^4}{(c - \mu)^3} + \bar{\gamma} \frac{R^2}{(c - \mu)^2} + c + A - \frac{k}{\pi a} \frac{1}{c - \mu} \right]^2 = \\ &= \frac{\pi}{8} i a^2 \frac{c}{(c - \mu)^2} \left[(c - \bar{\mu})(c - \bar{\mu} + \gamma) + (c - \mu)(c + A) - \frac{k}{\pi a} \right]^2 = 0\end{aligned}$$

S-a ținut cont că pentru punctele singulare $\zeta = c - \mu$ și $\zeta = -c - \mu$ avînd

$$|c - \mu| = R, \quad |-c - \mu| = \sqrt{c^2 - 2cm \cos \delta + m^2} < R$$

punctul $\zeta = c - \mu$ este situat pe cercul $|\zeta| = R$ iar punctul $\zeta = -c - \mu$ este interior acestui cerc. În plus, s-a ținut cont că expresia (25) a circulației suplimentare k se poate scrie sub forma

$$k = \pi a[(c - \bar{\mu})(c - \bar{\mu} + \bar{\gamma}) + (c - \mu)(c + A)] \quad (25')$$

Analog avem

$$\begin{aligned} \int_{(\Gamma)} z(\zeta) \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^2 \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)^{-1} d\zeta &= -\frac{a^2}{4} \int_{(\Gamma)} \left(\zeta + \mu + \frac{c^2}{\zeta + \mu} \right) \left[\frac{R^4}{\zeta^3} + \right. \\ &+ \bar{\gamma} \frac{R^2}{\zeta^2} + \frac{c^4}{(\zeta + \mu)^3} + A \frac{c^2}{(\zeta + \mu)^2} - \frac{k}{\pi a} \frac{1}{\zeta} \left. \right] \frac{(\zeta + \mu)^2}{(\zeta + \mu + c)(\zeta + \mu - c)} d\zeta = \\ &= -\frac{a^2}{4} (-\pi i) c^2 \left[\frac{R^4}{(c - \mu)^3} + \bar{\gamma} \frac{R^2}{(c - \mu)^2} + c + A - \frac{k}{\pi a} \frac{1}{c - \mu} \right]^2 = 0 \end{aligned}$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} \int_{(C)} z \frac{dF}{dz} dz &= -\pi a(\bar{\gamma} R^2 + A c^2) + k\mu, \\ \int_{(C)} z^2 \frac{dF}{dz} dz &= -\pi a(R^4 + 2\bar{\gamma} \mu R^2 + c^4) + k(2c^2 + \mu^2), \\ \int_{(C)} \left(\frac{dF}{dz} \right)^2 dz &= 2V_0 k + 2ia[-\pi a(\bar{\gamma} R^2 + A c^2) + k\mu], \\ \int_{(C)} z \left(\frac{dF}{dz} \right)^2 dz &= 2V_0 [-\pi a(\bar{\gamma} R^2 + A c^2) + k\mu] + \\ &+ 2ia[-\pi a(R^4 + 2\bar{\gamma} \mu R^2 + c^4) + k(2c^2 + \mu^2)]. \end{aligned}$$

Așa dar, în virtutea formulelor (28) și (29) avem

$$R_x - iR_y = i\rho V_0 k - i\rho a \cdot \text{Im}\{-\pi a(\bar{\gamma} R^2 + A c^2) + k\mu\}, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} M_0 &= -\frac{\rho}{2} \text{Re}\{2V_0 [-\pi a(\bar{\gamma} R^2 + A c^2) + k\mu] + \\ &+ ia[-\pi a(R^4 + 2\bar{\gamma} \mu R^2 + c^4) + k(2c^2 + \mu^2)]\}. \end{aligned} \quad (31)$$

$$R_x = 0$$

$$R_y = -\rho V_0 k + \rho a \text{Im}\{-\pi a(\bar{\gamma} R^2 + A c^2) + k\mu\}, \quad (30')$$

$$M_0 = -\frac{\rho}{2} \text{Re}\{2V_0 [-\pi a(\bar{\gamma} R^2 + A c^2) + k\mu] + ia(-2\pi a\bar{\gamma} \mu R^2 + k\mu^2)\}. \quad (31')$$

Prin urmare, paradoxul lui D'Alembert subsistă sub aceeași formă generalizată întîlnită în cazul obstacolului cilindric circular: *acțiunea asupra aripei este perpendiculară pe direcția de mișcare pe care ar avea-o fluidul dacă obstacolul n-ar exista.*

Rezultatele lui H. S. Tsien [3] pentru profilul (C) de tip Jucovski simetric se obțin făcând $\delta = \tau = 0$.

Dacă profilul (C) este subțire (δ foarte apropiat de $\frac{\pi}{2}$) și puțin curbat (τ este foarte mic), avem aproximările:

$$m = R \frac{\sin \tau}{\sin \delta} \approx R\tau,$$

$$R \approx \sqrt{R^2\tau^2 + c^2 + 2cR\tau\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)} \approx c,$$

$$\mu = -R \frac{\sin \tau}{\sin \delta} e^{-i\delta} = -R \sin \tau \operatorname{ctg} \delta + iR \sin \tau \approx iR\tau \approx ic\tau,$$

$$\gamma = 2i\left(m \sin \delta - \frac{V_0}{a}\right) + \frac{c^2}{m} e^{-i\delta} \approx 2i\left(c\tau - \frac{V_0}{a}\right) + \frac{c}{\tau}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) - i\right],$$

$$A^* = \frac{2R^3c}{m(m^2 - R^2)} \cos \delta e^{i\tau} = -2c\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)\left(\frac{1}{\tau} + i\right),$$

$$A = A^* + \gamma - \mu \approx ic\left(\tau - \frac{1}{\tau}\right) - c\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)\left(\frac{1}{\tau} + 2i\right) - 2i\frac{V_0}{a},$$

incît din (25) avem

$$k \approx -4\pi c V_0 \tau, \quad (25'')$$

astfel că pentru profile subțiri și puțin curbate circulația suplimentară k nu depinde de grosimea profilului, este proporțională cu τ și este aceeași oricare ar fi valoarea lui a .

Din (30') și (31') avem apoi

$$R_x = 0, \quad R_y \approx 4\pi \rho c V_0^2 \tau + \pi \rho a^2 c^3 (\tau + \pi - 2\delta) \quad (30'')$$

$$M_0 \approx -\pi \rho a^2 c^4 \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right). \quad (31'')$$

BIBLIOGRAFIE

1. Sanden H. v.: „Über den Auftrieb zylindrischer Körper im natürlichen Winde“, Zeitschrift für Math. und Phys., band 61, 1912, pag. 225—245,
2. Ciaplighin S. A.: „К теорий метелей“, Opere complete, Vol. II, Гостехиздам, Москва—Ленинград, 1948, стр. 567—575
3. Tsien H. S.: „Symmetrical Jucowski Airfoils in Shear Flow“, Quarterly of Applied Mathematics, tom. 1, nr. 2, 1943, pag. 130—148,
4. Vălcovici Victor: „Asupra unei teorii a aluviunilor“, Buletinul științific al Acad. R.P.R. tom. IV, nr. 4, 1952, pag. 653—660,
5. Iacob Caius: „Rezolvarea problemei lui Dirichlet pentru cerc în unele cazuri particulare“, Comunicările Acad. R.P.R., vol. XII, nr. 4, 1962, pag. 381—385.
6. Cristea I. Ion: „O mișcare plană cu vîrtej constant pentru un fluid perfect incompresibil“, Studii și cercetări matematice, Anul XIV, nr. 2, 1963, pag. 253—306.

ПЛОСКИЕ ДВИЖЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМ ВИХРЕМ ДЛЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ВОКРУГ ОДНОГО ПРОФИЛЯ ЖУКОВСКОГО ТИПА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Изучается движение с постоянным вихрем для идеальной несжимаемой жидкости текущей вокруг профиля Жуковского типа, в бесконечности скорость жидкости выполняет соотношение (1). Решение этой задачи дано в формулах (26) и (27), где циркуляция κ , которую мы считаем условием Жуковского, имеет выражение (25'). В конце формулы (30) и (31) дают гидродинамическое действие жидкости на крыле.

MOUVEMENT PLAN À TOURBILLON CONSTANT D'UN FLUIDE PARFAIT INCOMPRESSIBLE AUTOUR D'UN PROFIL JOUKOWSKY

RÉSUMÉ

On étudie le mouvement avec le tourbillon constant d'un fluide parfait incompressible autour d'un profil d'aile du type Joukowski, à l'infini la distribution des vitesses étant caractérisée par (1). La solution de ce problème est obtenue dans (26) et (27) où la circulation supplémentaire κ , calculée avec la condition de Joukowski, a l'expression (25'). Les formules (30) et (31) donnent enfin l'action hydrodynamique exercée par le fluide sur l'aile.

ASUPRA FORMEI PRODUS A INVERSII UNEI BAZE

P. MIRESCU

I

În evoluția codurilor calculatoarelor electronice cu scopul de a mări posibilitățile acestora în rezolvarea programelor liniare de mari proporții, un rol important îl are algoritmul lui Alex. Orden, stabilit în 1954, și cunoscut sub numele „forma produs a inversii unei baze“.

Redăm pe scurt acest algoritm.

1. Fie $A = (a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n)$ o matrice $n \times n$ a cărei inversă A^{-1} este cunoscută.

Fie $A_b = (a_1, a_2, \dots, b, \dots, a_n)$ o matrice dedusă din matricea A prin înlocuirea vectorului a_k cu vectorul b .

Ne propunem să calculăm inversa acesteia.

Deoarece A este prin ipoteză o matrice nedegenerată vectorii $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ sînt liniari independenți și formează o bază. Fie $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ vectorul coloană care exprimă vectorul b în funcție de vectorii a_i adică

$$b = \sum_{i=1}^n x_i a_i = Ax, \dots \quad (1)$$

de unde rezultă:

$$x = A^{-1}b \dots \quad (2)$$

Condiția necesară și suficientă pentru ca matricea A_b^{-1} să existe este ca vectorii: $a_1, a_2, \dots, b, \dots, a_n$ să fie liniar independenți, adică scalarul $a_k \neq 0$. Să presupunem că această condiție este realizată, în acest caz putem scrie:

$$a_k = -\frac{1}{x_k} \sum_{i \neq k} x_i a_i + \frac{1}{x_k} b \dots \quad (3)$$

Fie

$$\lambda = \left[-\frac{x_1}{x_k}, -\frac{x_2}{x_k}, \dots, \frac{1}{x_k}, -\frac{x_{k+1}}{x_k}, \dots, \frac{x_n}{x_k} \right] \dots \quad (4)$$

un vector-coloană cu ajutorul căruia relația (3) se mai poate scrie:

$$a_k = A_b \lambda \quad (5)$$

Dacă notăm cu E_k matricea unitate în care coloana k s-a înlocuit cu vectorul λ și ținând seama de relația (5) precum și de faptul că produsul unei matrice oarecare prin vectorul unitate e_i este tocmai coloana i a matricei, obținem:

$$A = A_b(e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, \lambda, e_{k+1}, \dots, e_n) = A_b E_k \dots \quad (6)$$

Această relație multiplicată, succesiv, la stînga cu A_b^{-1} și apoi la dreapta cu A^{-1} , găsim:

$$A_b^{-1} = E_k A^{-1}, \dots \quad (7)$$

care dă inversa matricei A_b .

2. Din cele arătate putem calcula din aproape în aproape inversa A^{-1} , a unei matrice pătrate — $n \times n$ — nedegenerată.

Fie $A = (a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n)$ matricea dată și $I = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ matricea unitate în care înlocuim succesiv coloanele e_i ($i = 1, 2, \dots, n$) prin vectorii coloană a_i ($i = 1, 2, \dots, n$), obținîndu-se astfel matricele $A_1, A_2, \dots, A_n \equiv A$, ce se pot scrie:

$$\begin{aligned} A_1^{-1} &= E_1 \cdot I_n = E_1 \\ A_2^{-1} &= E_2 A_1^{-1} = E_2 E_1 \\ &\vdots \\ A_n^{-1} &= A^{-1} = E_n A_{n-1}^{-1} = E_n E_{n-1} \dots E_1 = \prod_{i=0}^{n-1} E_{n-i} \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Această formulă arată că inversa poate fi scrisă sub forma unui produs de matrice elementare, de unde provine, de altfel, numele dat acestui algoritm.

Precizăm că în succesiunea de transformări elementare vor fi folosiți vectorii-coloană λ_i ale cărui componente sînt:

$$\lambda_i = \left[-\frac{x_{1i}}{x_{ii}}, -\frac{x_{2i}}{x_{ii}}, \dots, -\frac{x_{i-1,i}}{x_{ii}}, \frac{1}{x_{ii}}, -\frac{x_{i+1,i}}{x_{ii}}, \dots, -\frac{x_{ni}}{x_{ii}} \right] \dots \quad (9)$$

De asemenea vectorii x_i se pot scrie

$$x_i = A_{i-1}^{-1} a_i = E_{i-1} E_{i-2} \dots E_1 a_i, \dots \quad (10)$$

pentru orice $i \geq 2$, iar $x_1 \equiv a_1$.

În fine, din (8) găsim:

$$(A^{-1})^{-1} = A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_n^{-1} = \prod_{i=1}^n E_i^{-1} \dots, \quad (11)$$

formula ce dă matricea inițială.

II

În transformarea $H^{(1)}$ am definit vectorul H' astfel:

Fie $A = (a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n)$ o matrice $m \times n$. Componentele vectorului a_k le

(¹) Definită de John Fei — de la Universitatea Jale — U.S.A.

notăm cu a_{ik} ($i = 1, 2, \dots, m$) și presupunem că $a_{jk} \neq 0$. Acest element — se știe — se cheamă pivot.

Acest vector se transformă într-un alt vector de componente:

$$[a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{j-1,k}, -1, a_{j+1,k}, \dots, a_{nk}]$$

În fine, înmulțind componentele acestuia cu scalarul $\left(-\frac{1}{a_{jk}}\right)$ găsim vectorul:

$$H'_k = \left[-\frac{a_{1k}}{a_{jk}}, -\frac{a_{2k}}{a_{jk}}, \dots, \frac{1}{a_{jk}}, \dots, -\frac{a_{nk}}{a_{jk}} \right],^{(1)} \dots \quad (12)$$

de pivot a_{jk} , și care este tocmai vectorul λ , definit de (4).

În transformarea H se folosește matricea $I(H'_k) = (e_1, e_2, \dots, H'_k, \dots, e_n)$ care este identică cu matricea E_k .

Definiție. Se numește „matrice-imagină” a unei matrice date A printr-o transformare H'_k de pivot a_{jk} , matricea:

$$A^* = E_k A \dots \quad (13)$$

Această transformare schematic se prezintă astfel:

$A \xrightarrow{a_{jk}} A^*$ și se citește: matricea A se transformă în A^* , prin pivotul a_{jk} , cu ajutorul vectorului H'_k .

Dacă A^* este imaginea lui A , atunci matricea A este preimaginea lui A^* . Cu ajutorul „matricei-imagină” a unei matrice pătrate $(A_{n \times n})$, nesingulare, se poate calcula inversa acesteia sub forma unui produs de matrice elementare.

Teoremă. Printr-o succesiune de transformări A_i^* ($i = 1, 2, \dots, n$) de pivot $a_{ii} \neq 0$ și, respectiv, $\alpha_{ii}^{(2)} \neq 0$ se obține matricea inversă unei matrice date.

Demonstrație. În primul rând precizăm că prin matricele imagină A_i^* ($i = 2, 3, \dots, n$) definim imaginile, respectiv, ale matricelor produs:

$$(E_2 E_1) (E_3 E_2 E_1) \dots (E_n E_{n-1} \dots E_2 E_1),$$

adică:

$$\begin{aligned} A_2^* &= (E_2 E_1)^* = E_2 E_1 A. \\ A_3^* &= (E_3 E_2 E_1)^* = E_3 E_2 E_1 A \dots \\ &\vdots \\ A_n^* &= \left(\prod_{i=0}^{n-1} E_{n-i} \right)^* = \left(\prod_{i=0}^{n-1} E_{n-i} \right) A. \end{aligned} \quad (14)$$

Din definiția (13) obținem:

$$A_1^* = E_1 A,$$

⁽¹⁾ Prin α_{ii} se înțelege elementul pivot ales din diferitele matrici $(E_1 A)$; $(E_2 E_1 A) \dots$

⁽²⁾ Vezi „Gazeta Matematică și Fizică”, seria A, nr. 11/1961, București.

iar definițiile (14) se pot scrie astfel:

$$A_2^* = E_2 A_1^*$$

$$A_3^* = E_3 A_2^*$$

$$\vdots$$

$$A_n^* = E_n A_{n-1}^*$$

În ultima egalitate înlocuind matricea A_{n-1}^* , găsim:

$$A_n^* = E_n \left(\prod_{i=1}^{n-1} E_{n-i} \right) A = E_n E_{n-1}, \dots, E_1 A, \dots \quad (15)$$

dar pentru ca să avem: $A_n^* \equiv I$ atunci trebuie ca $A^{-1} = E_n$.

$$E_{n-1}, \dots, E_1 = \prod_{i=1}^{n-1} E_{n-i} \quad (16)$$

În continuare, din relația (15) găsim

$$(A_n^*)^{-1} = A^{-1} E_1^{-1} E_2^{-1}, \dots, E_n^{-1} = A^{-1} (A^{-1})^{-1} = A^{-1} A = I,$$

ceea ce confirmă faptul că $A_n^* \equiv I$.

De asemenea, din relația (16) găsim:

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1}, \dots, E_n^{-1} = \prod_{i=1}^n E_i^{-1},$$

iar pentru matricele A_i avem succesiunea de egalități:

$$A_1 = E_1^{-1};$$

$$A_2 = E_1^{-1} E_2^{-1}$$

$$\vdots$$

$$A_n = A = \prod_{i=1}^n E_i^{-1}.$$

Aplicație.

Fie

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \text{ o matrice nedegenerată } (|A| = -3)$$

Luînd ca pivot pe $a_{11} = 3$ găsim

$$H'_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right]$$

În acest caz

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_1^{-1},$$

iar

$$A_1^* = E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 7/3 & 1/3 \\ 0 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 5/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

De data aceasta luînd ca pivot $\alpha_{22} = 4/3$, obținem

$$H'_2 = [-7/4, 3/4, -5/4],$$

de unde găsim

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & -7/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & -5/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculăm produsul :

$$E_2 E_1 = \begin{pmatrix} 3/2 & -7/4 & 0 \\ -1/2 & 3/4 & 0 \\ 1/2 & -5/4 & 1 \end{pmatrix}$$

Imaginea acestei matrice este

$$A_2^* = (E_2 E_1)^* = E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & -3/4 \end{pmatrix}$$

În fine, luînd ca pivot elementul $\alpha_{33} = -\frac{3}{4}$ noul vector H'_3 este

$$H'_3 = \left[-\frac{1}{3}, 1/3, -4/3 \right],$$

iar matricea

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & -4/3 \end{pmatrix}.$$

În cazul de față obținem

$$A^{-1} = E_3 E_2 E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & -4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -7/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & -5/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4/3 & -4/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 5/3 & -4/3 \end{pmatrix} = 1/3 \begin{pmatrix} 4 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Пентру verificare calculăm

$$A_3^* = (E_3 E_2 E_1)^* = E_3 E_2 E_1 A = \\ = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = I.$$

Prin acest procedeu evităm calculul vectorilor x_i din formula (10).

BIBLIOGRAFIE

1. Revue française de Recherche Opérationnelle, nr. 30—1964, Paris.
2. Revista Di Politica Economica, iunie 1957, Roma.
3. Gazeta Matematică și Fizică, Seria A, nr. 11/1961, „Asupra transformării H, algoritmul folosit în Programarea liniară“ de conf. P. Mirescu.
4. H. Hadley: „Linear Algebra“, U.S.A.
5. M. Simonard: „Programmation linéaire“.

ОТНОСИТЕЛЬНО ФОРМЫ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ИНВЕРСИИ НЕКОТОРОГО ОСНОВАНИЯ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе «Относительно формы произведения инверсии основания» автор в первой части излагает вкратце алгоритм Алекса Ордена для нахождения «формы произведения инверсии некоторого основания».

Во второй части работы автор строит вектор H^1 (отличный от вектора H преобразования того же названия Джона Фея), для того чтобы определить «прообраз матрицы» данной матрицы.

С помощью этого определения, приложенного к некоторой правильной матрицы (пхп) — профессор П. Миреску излагает и доказывает теорему: «Последовательность преобразований $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ $a_{ii} \neq 0$ и, соответственно, $a_{ii} \neq 0$ получается обратная матрица данной матрицы».

Прямым построением последовательности векторов H_i^1 и предположительно некоторых матриц E_i автор устанавливает выражение обратной матрицы данной матрицы в форме произведения элементарных матриц, установленного А. Орденом своим алгоритмом.

При использовании вышеуказанного метода становится бесполезным вычисление векторов X_i формулы А. Ордена. Получаются таким образом прямым путем элементарные

матрицы E_i , произведение которых $\prod_{i=0}^n E_{n-i} = A^{-1}$ (А будучи первоначальная правильная матрица).

SUR LA FORME PRODUIT DE L'INVERSE D'UNE BASE

R É S U M É

Dans l'ouvrage „Sur la forme produit de l'inverse d'une base“, l'auteur expose dans la première partie de l'ouvrage, en résumé, l'algorithme d'Alex. Orden pour trouver „la forme produit de l'inverse d'une base“.

Dans la seconde partie de l'ouvrage, l'auteur construit le vecteur H' (différent du vecteur H de la transformation au même nom de John Fei) afin de définir „la matrice image“ d'une matrice donnée.

A l'aide de cette définition — appliquée à une matrice $(n \times n)$, régulière — le professeur P. Mirescu énonce et démontre le théorème : par la succession de transformations $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ $a_{ii} \neq 0$ et, respectivement, $\alpha_{ii} \neq 0$, on obtient la matrice inverse d'une matrice donnée.

Par la construction directe d'une succession de vecteurs H'_i et implicitement de matrices E_i , l'auteur établit l'expression de la matrice inverse d'une matrice donnée, sous la forme d'un produit de matrices élémentaires, forme qui a été établit par Alex. Orden, par son algorithme.

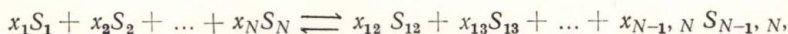
Par suite de la méthode énonce, la calcul des vecteurs x_i de la formule d'Alex. Orden, devient inutile, obtenant ainsi directement les matrices élémentaires E_i , dont le produit

$$\prod_{i=0}^n E_{n-i} = A^{-1} \quad (A \text{ étant la matrice initiale régulière}).$$

UN MODEL STOCASTIC ÎN CINETICA REACȚIILOR CHIMICE

D. FIRESCU și D. NEGOIU

Se consideră o reacție chimică de tipul



indicînd faptul global că din molecule de specii S_i cu coeficienții stoechiometrici x_i se pot forma molecule de specii S_{ij} cu coeficienții stoechiometrici x_{ij} și invers, acestea din urmă pot reacționa spre a reforma moleculele inițiale.

Reacțiile chimice considerate pot fi reprezentate ca un proces Markov discontinuu de tipul unui proces de naștere și moarte $\binom{N}{2}$ — dimensional

$$\{X_{12}(t), X_{13}(t), \dots, X_{N-1, N}(t); t \geq 0\},$$

unde $X_{ij}(t)$ sînt concentrațiile speciilor S_{ij} la momentul t .

Se stabilesc ecuațiile diferențiale ale procesului care caracterizează viteza reacției și se confirmă legea acțiunii maselor care guvernează reacțiile de tipul considerat.

1

Viteza reacțiilor chimice și dependența ei de condițiile în care decurg aceste reacții constituie, după cum se știe, obiectul cineticii reacțiilor chimice. Ipoteza fundamentală care stă la baza studiilor de cinetică chimică este aceea a ciocnirilor dintre moleculele reactante.

Viteza reacțiilor chimice a fost explicată la început pornind de la ideea unei coliziuni intermoleculare. J.H. Van't Hoff (1884) admite că viteza de reacție este proporțională cu concentrațiile reactanților fără a scoate suficient în evidență slaba posibilitate ca trei sau mai multe molecule să se întâlnească.

Ideea unui simplu șoc s-a constatat ulterior incompletă. Încercările de verificare a teoriei au arătat că reacțiile chimice sînt în mare parte mai complexe (reacții paralele, succesive, opuse etc.). S-au determinat ordine de reacții fracționare sau zero și aceasta fără a mai vorbi de complexitatea reacțiilor heterogene.

Teoria clasică a lui J.H. Van't Hoff nu are caracter de generalitate, ea este o teorie empirică. Un calcul elementar arată că dacă toate șocurile ar fi eficace, reacțiile ar trebui să fie instantanee, decurgînd de aici necesitatea activării lor (S. Arrhenius 1889).

Admițind noțiunea de șoc și de activare a moleculelor, F.A. Lindemann (1922) a dezvoltat teoria reacțiilor monomoleculare.

Ulterior, în lucrările lui H. Eyring și M. Polanyi (1931—1932), se calculează vitezele de reacție bazându-se pe noțiunea complexului activat, format intermediar în reacție.

După această dată, eforturile au fost îndreptate înspre explicarea mecanismului intim al proceselor elementare prin care se desfășoară o reacție. Un rol important în explicarea proceselor intime îl au radicalii liberi, reacțiile înlănțuite (N. N. Semenov 1927).

În procesele elementare de ciocnire au mare importanță fenomenele fotochimice, transferul de energie între molecule, transferul de energie între diferitele grade de libertate de translație, de vibrație.

Teoria ciocnirilor ține seama de statistica clasică a lui L. Boltzmann, întrucât viteza moleculelor se calculează cu legea de distribuție Maxwell-Boltzmann.

H. Eyring (1935) a dezvoltat însă teoria stării de tranziție, a complexului activat sau teoria vitezelor absolute de reacție. Aceasta admite o interacțiune a atomilor și ține seama de toate mișcările interne ale moleculei. Energia potențială a moleculelor ce interacționează este funcție de poziția atomilor și printr-o configurație de energie minimă (stare de tranziție, complex activat) reactanții trec în produși.

Viteza de reacție depinde de viteza trecerii peste bariera de potențial și de echilibru între reactanți și complexul activat. Acest ultim echilibru a fost tratat pe baza mecanicii statistice clasice care prin funcția de repartiție definește probabilitatea ca o moleculă să se găsească într-o stare energetică oarecare. Prin această funcție se iau în considerare toate felurile de mișcări ale moleculei (de translație, de rotație, de vibrație), se explică energia de activare și rolul temperaturii din factorul exponențial al vitezei de reacție. Calculele făcute pe această bază explică vitezele unor reacții chimice fără a se ajunge la expresii general valabile.

Apropierea de termodinamică a definit mărimi ca energie liberă de activare, căldură de activare, entropie de activare.

Procesul reacției chimice poate fi deci descris ca un *proces secvențial* de trecere a moleculelor reactante printr-un șir de stări cu formarea unui complex activat pînă la starea de produs final. Viteza de reacție depinde, pe de o parte, de viteza trecerii peste bariera de potențial, iar, pe de altă parte, de echilibrul dintre reactanți și complexul activat.

Se poate trage concluzia că cinetica chimică nu se găsește încă în momentul în care să se fi conturat unele concluzii generale, definitive. De asemenea, se poate spune că în toate etapele de dezvoltare a trebuit să se admită un caracter probabilistic al proceselor de desfășurare în timp a reacțiilor chimice. Pe lângă acestea, ceea ce nu a putut fi contrazis și are caracter de evidență este necesitatea unei interacțiuni a reactanților.

Dezvoltarea teoriei pe linia aceasta pînă în prezent, pare a implica luarea în considerație a o mulțime de factori greu de stăpînit. O simplificare a lucrurilor ar însemna tratarea fenomenelor dintr-un punct de vedere statistico-probabilistic. Evoluția unui sistem chimic, a unei reacții chimice este evo-

luția unui ansamblu cu un număr mare de indivizi ale cărei legi pot fi abordate statistic.

Teoria proceselor stocastice și în particular procesele Markov oferă posibilitatea de a descrie o serie de fenomene fizice și chimice. Avantajul modelelor stocastice față de modelele deterministe constă în faptul că cele dintii descriu mult mai fidel procesele corespunzătoare, întrucît iau în considerație factorii întîmplători, fluctuațiile inerente ce apar în fenomenele studiate. Tocmai această elasticitate a modelelor stocastice ar suplini bogăția factorilor de care depinde la un moment dat viteza reacției chimice.

O proprietate esențială a proceselor Markov constă în aceea că probabilitatea ca procesul să se găsească într-o anumită stare la momentul t depinde numai de starea în care se găsea deja procesul la momentul τ ($\tau < t$) și este independentă de istoria procesului înainte de momentul τ . O asemenea proprietate este de altfel caracteristică studiilor de cinetică chimică care nu țin seama de istoria particulelor reactante.

Procesele bimoleculare joacă un rol determinant în cinetica chimică, nu numai în reacțiile bimoleculare, ci și în alte tipuri de reacții (mono-moleculare etc.). Pe de altă parte, cu cît numărul de molecule diferite necesare să interacționeze simultan este mai mare, cu atît procesul este mai puțin probabil. Ciocnirile trimoleculare, de exemplu, sînt de circa o mie de ori mai puțin probabile decît cele bimoleculare.

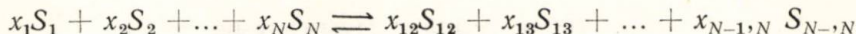
În baza acestor considerații putem să admitem că procesul elementar al reacției are loc prin ciocniri bimoleculare, limitînd astfel această primă discuție la reacții chimice de tipul



Sub această formă se exprimă că din molecule de specii S_i și S_j , care se găsesc în cantitățile stoechiometrice indicate respectiv de numerele x_i și x_j , se pot forma molecule de specie S_{ij} în cantitatea stoechiometrică x_{ij} și invers, moleculele formate de specie S_{ij} cu coeficientul stoechiometric x_{ij} pot, la rîndul lor, să reacționeze spre a reforma moleculele de specii S_i și S_j cu coeficienții stoechiometrici corespunzători x_i și x_j .

2

În cele ce urmează, considerăm o reacție chimică de un tip mai general



care, în mod analog, cu reacțiile bimoleculare, exprimă faptul global că din molecule de specii S_i date în cantitățile stoechimetrice x_i se pot forma molecule de specie S_{ij} în cantitățile stoechimetrice x_{ij} și invers, acestea din urmă pot reacționa spre a reforma moleculele inițiale.

Reacțiile chimice considerate pot fi reprezentate ca un proces Markov discontinuu multidimensional de tipul unui proces de naștere și moarte (N_2) — dimensional

$$\{X(t), t \geq 0\} = \{X_{12}(t), X_{13}(t), \dots, X_{N-1, N}(t); t \geq 0\},$$

unde $X_{ij}(t)$ este concentrația speciei S_{ij} ($i = 1, 2, \dots, N-1$; $j = i+1$) la momentul t .

Se presupune că într-un interval de timp mic $(t, t + \Delta t)$ are loc, fie formarea (nașterea) unei singure molecule în oricare din speciile S_{ij} prin ciocnirea a câte unei molecule din speciile S_i și S_j fie dispariția (moartea) a unei singure molecule în oricare din speciile S_{ij} , moleculă care poate reacționa spre a reforma câte o moleculă din speciile inițiale S_i și S_j .

Spațiul stărilor este un spațiu Euclidian $(\mathbb{N})$ — dimensional asociat procesului, $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$, adică spațiul tuturor valorilor posibile $\mathbf{x} = (x_{12}, x_{13}, \dots, x_{N-1, N})$ ($x_{ij} \leq \min(x_i^0, x_j^0)$), pe care componentele $X_{ij}(t)$ ale vectorului aleator $\mathbf{X}(t)$ le pot lua.

Procesul de formare a reacțiilor chimice de mai sus poate fi definit cu ajutorul probabilităților următoare:

1°. $\lambda_{ij}(x_i^0 - x_{ij})(x_j^0 - x_{ij}) \Delta t + o(\Delta t)$ ($\lambda_{ij} > 0$), probabilitatea pentru ca într-un interval de timp $(t, t + \Delta t)$ să se formeze o moleculă din specia S_{ij} prin ciocnirea a câte unei molecule din speciile S_i și S_j , știind că la momentul inițial ($t = 0$) erau x_i^0 și x_j^0 molecule din specia S_i respectiv S_j și x_{ij} molecule din specia S_{ij} la momentul t ($t > 0$);

2°. $\mu_{ij}x_{ij} \Delta t + o(\Delta t)$ ($\mu_{ij} > 0$), probabilitatea pentru ca într-un interval de timp $(t, t + \Delta t)$, o moleculă din specia S_{ij} să reacționeze spre a reforma câte o moleculă din speciile S_i și S_j , știind că la momentul t ($t > 0$) erau x_{ij} molecule din specia S_{ij} ;

3°. $o(\Delta t)$, probabilitatea pentru ca într-un interval de timp $(t, t + \Delta t)$ să aibă loc modificări mai mari decât o unitate (celulă) în concentrațiile speciilor S_{ij} ;

4°. $1 - \Delta t \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left(\lambda_{ij}(x_i^0 - x_{ij})(x_j^0 - x_{ij}) + \mu_{ij}x_{ij} \right) + o(\Delta t)$, probabilitatea pentru ca în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$ să nu se schimbe nimic în concentrațiile speciilor S_{ij} , știind că la momentul inițial erau x_i^0 și x_j^0 molecule din specia S_i respectiv S_j și x_{ij} molecule din specia S_{ij} la momentul $t > 0$.

Concentrațiile speciilor S_k ($k = 1, 2, \dots, N$) sînt statistic independente între ele.

După cum se constată, procesul stocastic definit mai sus nu este un proces de naștere și moarte simplu (nefiind liniar în raport cu concentrațiile x_{ij} ale speciilor S_{ij}).

Fie

$$P(\mathbf{x}; t) = P\{X_{12}(t) = x_{12}, X_{13}(t) = x_{13}, \dots, X_{N-1, N}(t) = x_{N-1, N}\},$$

probabilitatea ca la momentul t ($t > 0$) să se găsească respectiv $x_{12}, x_{13}, \dots, x_{N-1, N}$ celule în speciile $S_{12}, S_{13}, \dots, S_{N-1, N}$.

În baza lui (1° — 4°) putem să scriem condiția de regularitate

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}; t + \Delta t) = & \left(1 - \Delta t \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left(\lambda_{ij}(x_i^0 - x_{ij})(x_j^0 - x_{ij}) + \mu_{ij}x_{ij} \right) \right) P(\mathbf{x}; t) + \\ & + \Delta t \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \lambda_{ij} (x_i^0 - (x_{ij} - 1)) (x_j^0 - (x_{ij} - 1)) P(\mathbf{x} - \mathbf{e}_{ij}; t) + \\ & + \Delta t \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \mu_{ij} (x_{ij} + 1) P(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{ij}; t) + o(\Delta t), \end{aligned}$$

unde $\mathbf{e}_{ij} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ este un vector cu $\binom{N}{2}$ componente avînd toate componentele nule în afară de aceea corespunzătoare componentei x_{ij} a vectorului $\mathbf{x} = (x_{12}, \dots, x_{i,j-1}, x_{ij}, x_{i,j+1}, \dots, x_{N-1,N})$ care este egală cu unu.

De aici rezultă

$$\begin{aligned} \frac{P(\mathbf{x}; t + \Delta t) - P(\mathbf{x}; t)}{\Delta t} = & - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left(\lambda_{ij}(x_i^0 - x_{ij})(x_j^0 - x_{ij}) + \mu_{ij}x_{ij} \right) (P(\mathbf{x}; t) + \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \lambda_{ij} (x_i^0 - (x_{ij} - 1)) (x_j^0 - (x_{ij} - 1)) P(\mathbf{x} - \mathbf{e}_{ij}; t) + \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \mu_{ij}(x_{ij} + 1) P(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{ij}; t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \end{aligned}$$

Trecînd la limită, cînd $\Delta t \rightarrow 0$, obținem

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\mathbf{x}; t)}{\partial t} = & \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \lambda_{ij} (x_i^0 - (x_{ij} - 1)) (x_j^0 - (x_{ij} - 1)) P(\mathbf{x} - \mathbf{e}_{ij}; t) - \\ & - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left(\lambda_{ij}(x_i^0 - x_{ij})(x_j^0 - x_{ij}) + \mu_{ij}x_{ij} \right) P(\mathbf{x}; t) + \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \mu_{ij}(x_{ij} + 1) P(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{ij}; t) \quad (x_{ij} \geq 1) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}; t)}{\partial t} = \left(- \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \lambda_{ij} x_i^0 x_j^0 P(\mathbf{x}; t) + \mu_{ij} P(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{ij}; t) \right) (x_{ij} = 0) \quad (2.2)$$

Introducînd funcția generatoare

$$F(\mathbf{s}; t) = \sum_{x_{ij} \leq \min(x_i^0, x_j^0)} P(\mathbf{x}; t) s_{12}^{x_{12}} s_{13}^{x_{13}} \dots s_{N-1,N}^{x_{N-1,N}},$$

unde am notat cu $\mathbf{s}$ vectorul de componente $s_{12}, s_{13}, \dots, s_{N-1,N}$ ($|s_{ij}| \leq 1, j = i + 1, i = 1, 2, \dots, N - 1$), ecuațiile (2.1) și (2.2) se pot scrie

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\mathbf{s}; t)}{\partial t} = & \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \lambda_{ij} s_{ij}^2 (s_{ij} - 1) \frac{\partial^2 F(\mathbf{s}; t)}{\partial s_{ij}^2} + \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left(\lambda_{ij} s_{ij} (s_{ij} - (s_{ij} - 1)(x_i^0 + x_j^0 - 1)) - \mu_{ij} (s_{ij} - 1) \right) \frac{\partial F(\mathbf{s}; t)}{\partial s_{ij}} + \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \lambda_{ij} x_i^0 x_j^0 (s_{ij} - 1) F(\mathbf{s}; t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Aplicînd funcția generatoare cumulant

$$K(\mathbf{u}; t) = \log F(\mathbf{s}; t),$$

unde $\mathbf{u}$ este vectorul de componente $u_{12}, u_{13}, \dots, u_{N-1,N}$ ($e^{u_{ij}} = s_{ij}$; $j = i + 1$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$), ecuația (2.3) devine

$$\begin{aligned} \frac{\partial K(\mathbf{u}; t)}{\partial t} = & \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \lambda_{ij} (e^{u_{ij}} - 1) \left(\frac{\partial^2 K(\mathbf{u}; t)}{\partial u_{ij}^2} + \left(\frac{\partial K(\mathbf{u}; t)}{\partial u_{ij}} \right)^2 - \frac{\partial K(\mathbf{u}; t)}{\partial u_{ij}} \right) + \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left(\lambda_{ij} (1 - (x_i^0 + x_j^0)) - \mu_{ij} e^{-u_{ij}} \right) (e^{u_{ij}} - 1) \frac{\partial K(\mathbf{u}; t)}{\partial u_{ij}} + \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \lambda_{ij} x_i^0 x_j^0 (e^{u_{ij}} - 1) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Pe de altă parte, ținând seama de relațiile dintre funcția generatoare cumulănt și momentele vectorului aleator $\mathbf{X}(t)$ avînd componentele $X_{12}(t), X_{13}(t), \dots, X_{N-1,N}(t)$, și folosind notațiile uzuale, avem

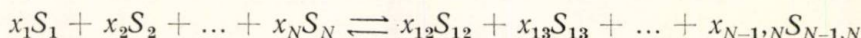
$$\begin{aligned} K(\mathbf{u}; t) = & \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N u_{ij} M(X_{ij}(t)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N u_{ij}^2 D^2(X_{ij}(t)) + \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=k+1}^N u_{ij} u_{kl} \text{Cov}(X_{ij}(t), X_{kl}(t)) + \dots \end{aligned}$$

Calculînd derivatele parțiale $\partial K(\mathbf{u}; t)/\partial t$, $\partial K(\mathbf{u}; t)/\partial u_{ij}$, $\partial^2 K(\mathbf{u}; t)/\partial u_{ij}^2$ și înlocuind expresiile acestor derivate în (2.4), rezultă

$$\begin{aligned} \frac{dM(X_{ij}(t))}{dt} = & \lambda_{ij} (x_i^0 x_j^0 - (x_i^0 + x_j^0) M(X_{ij}(t)) + M^2(X_{ij}(t)) + D^2(X_{ij}(t))) - \\ & - \mu_{ij} M(X_{ij}(t)), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$(j = i + 1, i = 1, 2, \dots, N - 1),$$

adică ecuațiile care determină evoluția în timp a procesului reacțiilor chimice de tipul



Ecuațiile (2.5) generalizează pe acelea obținute de Rengyi A. [7] într-un caz particular.

3

După cum se știe, reacțiile chimice de acest tip sînt guvernate de *legea acțiunii maselor*, care de altfel se confirmă și de modelul stocastic respectiv.

Într-adevăr, observînd că

$$x_i^0 x_j^0 - (x_i^0 + x_j^0) M(X_{ij}(t)) + M^2(X_{ij}(t)) = M(x_i^0 - X_{ij}(t)) M(x_j^0 - X_{ij}(t)),$$

ecuațiile (2.5) se pot pune sub forma

$$\frac{dM(X_{ij}(t))}{dt} = \lambda_{ij} \left(M(x_i^0 - X_{ij}(t)) M(x_j^0 - X_{ij}(t)) + D^2(X_{ij}(t)) \right) - \mu_{ij} M(X_{ij}(t))$$

$$(j = i + 1, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1) \quad (3.1)$$

Cum însă avem

$$D^2(X_{ij}(t)) \ll M(x_i^0 - X_{ij}(t)) M(x_j^0 - X_{ij}(t)),$$

înlocuim că ecuațiile (3.1) pot fi înlocuite cu ecuațiile aproximative

$$\frac{dM(X_{ij}(t))}{dt} \simeq \lambda_{ij} M(x_i^0 - X_{ij}(t)) M(x_j^0 - X_{ij}(t)) - \mu_{ij} M(X_{ij}(t))$$

$$(j = i + 1, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1)$$

sau

$$\frac{dM(X_{ij}(t))}{dt} \simeq \lambda_{ij} \left(x_i^0 - M(X_{ij}(t)) \right) \left(x_j^0 - M(X_{ij}(t)) \right) - \mu_{ij} M(X_{ij}(t))$$

$$(j = i + 1, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1) \quad (3.2)$$

Începînd de la un moment t suficient de mare, procesul de formare a reacțiilor chimice ajunge în echilibru. Rezultă deci că de la acel moment, ne așteptăm ca toate concentrațiile speciilor S_{ij} să rămână constante, adică

$$M(X_{ij}(t)) = M(X_{ij}) = \text{const.},$$

pentru fiecare i și j dați.

În acest caz, derivatele $dM(X_{ij})/dt$ sînt nule, astfel încît, din (3.2), deducem

$$\prod_{i=1}^{N-1} \prod_{j=i+1}^N \frac{M(X_{ij})}{(x_i^0 - M(X_{ij}))(x_j^0 - M(X_{ij}))} = \prod_{i=1}^{N-1} \prod_{j=i+1}^N \frac{\lambda_{ij}}{\mu_{ij}} \quad (3.3)$$

Relația (3.3) exprimă cunoscuta lege a acțiunii maselor despre care am amintit mai sus, care după cum se vede, își găsește confirmarea în modelul stocastic de față.

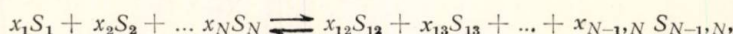
BIBLIOGRAFIE

1. Bartholomay A. F.: A stochastic approach to chemical reaction kinetics, Harvard University, thesis, 1957.
2. Bartholomay A. F.: Stochastic models for chemical reactions, Bull. Math. Biophys. vol. 20, 1958.
3. Bharucha-Reid T. A.: Elements of the theory of Markov processes and their applications, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., 1960.
4. Fireescu D. și Dr. Tăutu P.: Asupra unui model stocastic al hematopoezei, Studii și cercetări matematice, nr. 9, 1965.
5. Fireescu D. și Dr. Tăutu P.: A stochastic model of the embryonic endoderm formation at inferior metazoars, Math. pures et appliquées, nr. 7, 1966 (sub tipar).
6. Frost A. A., Pearson R. G.: Kinetics and Mechanism, Wiley, 1956.
7. Rényi A.: Betrachtung chemischer Reaktionen mit Hilfe der Theorie der stochastischen Prozesse, Magyar Tud. Akad. Alkalm. Mat. Inst. Közl., vol. 2, p. 93—101, 1954.

СТИХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ В КИНЕТИКЕ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Рассматривается химическая реакция типа



выражающая общий факт, что из молекул типа, которые находятся в стехиометрических количествах, указанных числами x_i , возможно образование молекул типа S_{ij} в стехиометрических количествах x_{ij} и наоборот, образованные молекулы типа S_{ij} со стехиометрическими коэффициентами x_{ij} могут, в свою очередь, реагировать, преобразуясь заново в молекулы первоначального типа S_i со стехиометрическими коэффициентами x_i .

Рассматриваемые химические реакции могут быть представлены с помощью непостоянного процесса Маркова, типа размерного процесса $\binom{N}{2}$ рождения или смерти

$$\{X_{12}(t), X_{13}(t), \dots, X_{N-1, N}(t); t \geq 0\}$$

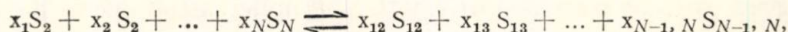
где $X_{ij}(t)$ являются концентрациями типов S_{ij} в момент t .

Устанавливаются дифференциальные уравнения (2.5) соответственно (3.1) процесса, которые характеризуют скорость реакции (развитие процесса во времени), а также соответственно (3.3) подтверждается закон действия масс, который руководит химическими реакциями рассматриваемого типа.

UN MODÈLE STOCHASTIQUE DANS LA CINÉTIQUE DES RÉACTIONS CHIMIQUES

RÉSUMÉ

On considère une réaction chimique du type



en exprimant le fait global que dès molécules d'espèces S_i qui se trouvent dans les quantités stoechiométriques indiquées par les nombres x_i , se peut former des molécules d'espèces S_{ij} dans les quantités stoechiométriques x_{ij} et inversement, les molécules formées d'espèces S_{ij} aux coefficients stoechiométriques x_{ij} peuvent, à son tour, réagir pour reformer les molécules initiales d'espèces S_i aux coefficients stoechiométriques x_i .

Les réactions chimiques considérées peuvent être représentées à l'aide d'un processus de Marcoff discontinu du type d'un processus de naissance et mort à $\binom{N}{2}$ dimensions

$$\{X_{12}(t), X_{13}(t), \dots, X_{N-1, N}(t); t \geq 0\},$$

où $X_{ij}(t)$ sont les concentrations des espèces S_{ij} au moment t .

On établit les équations différentielles (2.5) respectivement (3.1) du processus qui caractérisent la vitesse de la réaction (l'évolution en temps du processus) et toutefois en conformité de (3.3) se confirme la loi de l'action des masses qui gouverne les réactions chimiques du type considéré.

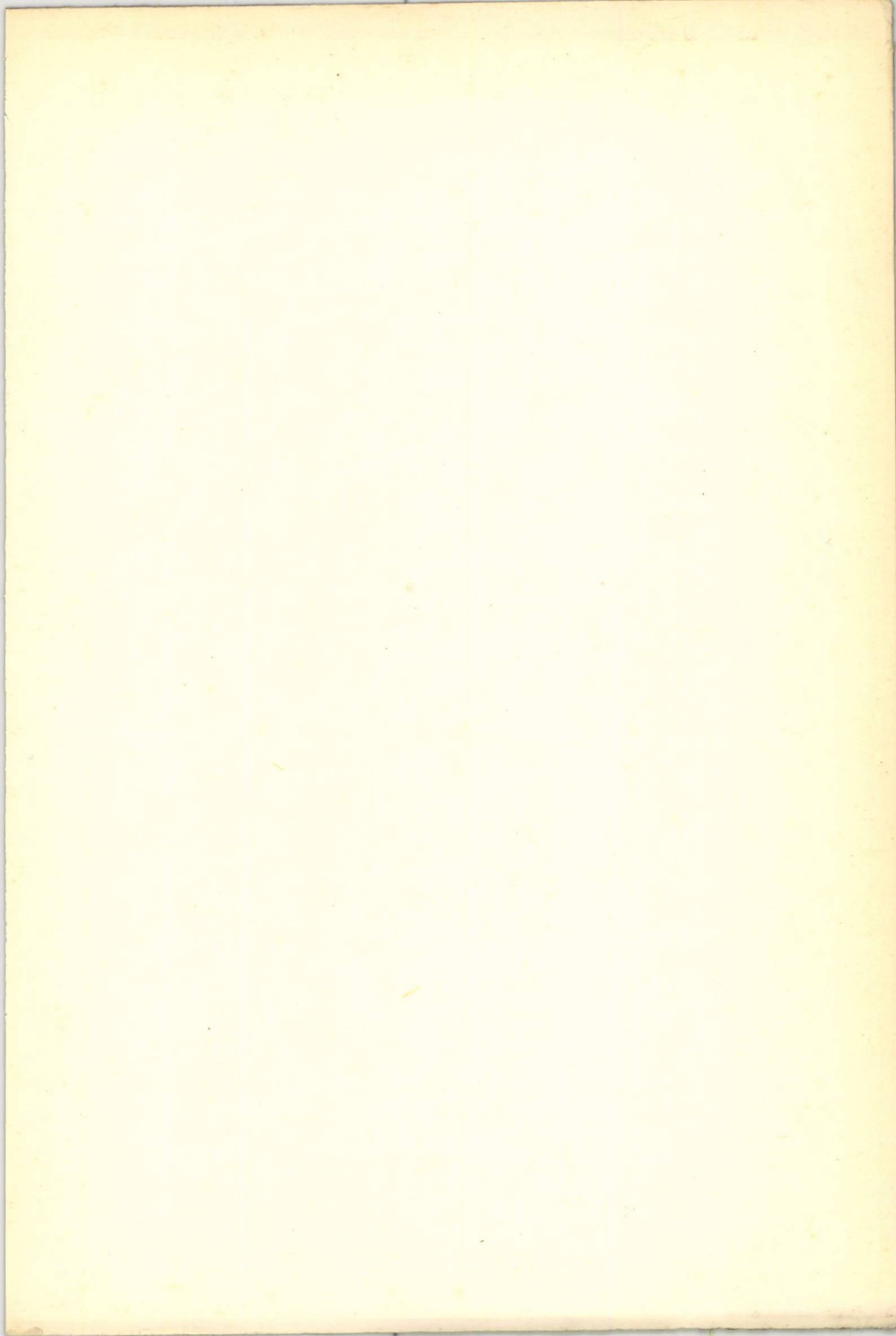




Redactor: ȘTEFANIA BARBU
Tehnoredactor: MIHAIL GEORGESCU

Analele Universității București
Seria ȘTIINȚELE NATURII
MATEMATICĂ — MECANICĂ
Anul XIV — Nr. 2 — 1965





40.525

Lei 8